Chapitre 5

Expressions algébriques

I. Développer et factoriser

1) Développer

Définition

Développer une expression consiste à transformer un **produit** en une **somme** (ou une différence).

Propriété

Pour tous nombres réels k, a, b, c et d on a :

Méthode

Quand une parenthèse est précédée d'un signe moins, on développe en multipliant par -1, c'est à dire que l'on change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse. Sinon on ne change rien.

Exemple :

Simplifier :
$A = (-6x - 4) - (5x - 4)$

Développer :
$B = (4x - 5)(7 - 3x)$

----

2) Factoriser

Définition

Factoriser, c'est transformer une **somme (ou une différence)** en un **produit**.

Exemple : $3x + 3y = 3 \times (x + y) = 3(x + y)$

Remarque Devant une parenthèse, on fait souvent disparaître le signe $\times$

Méthode - Factoriser

$A = (2x+3)(4x+1) - (2x+3)(x+2)$

1) Repérer le facteur commun
Le facteur commun est $(2x+3)$

$A = (2x+3)[......$

2) L'écrire devant et <u>ouvrir un crochet</u>

$A = (2x+3)[(4x+1).........$

3) Se poser la question "Dans le premier terme par quoi est multiplié $(2x+3)$". L'écrire dans le crochet.

$A = (2x+3)[(4x+1) - ....$

4) Recopier le signe "-" ou "+" qui séparait les deux termes.

$A = (2x+3)[(4x+1) - (x+2)]$

5) Se poser la question "Dans le second terme par quoi est multiplié $(2x+3)$" . L'écrire dans le crochet et fermer le crochet.

Exemple : Factoriser $B = (x-1)(3x+4) - (x-1)(x+3)$

$B = (x-1)(3x+4) - (x-1)(x+3)$
$B = (x-1)[(3x+4) - (x+3)]$
$B = (x-1)[3x+4-x-3]$
$B = (x-1)(2x+1)$

3) Identités remarquable

Propriété

Identités remarquables : Pour tous nombres réels a et b on a :

Exemple : Factoriser les expressions P et Q ci-dessous.

$P = (x-3)^2 - 49$ $\quad$ $Q = (x+1)^2 - (3-x)^2$

------------------------ ------------------------

------------------------ ------------------------

------------------------ ------------------------

II. Résolution d'équations

1) Équations du premier degré

a) propriété de la balance

Propriétés

On ne change pas une égalité en faisant une addition , soustraction, multiplication ou division par un même nombre. Autrement dit; pour trois nombres relatifs a, b et c (avec $c \neq 0$ pour la division), si $a = b$, alors :

1) ---------------- **2)** ---------------- **3)** ---------------- **4)** ----------------

b) Méthode de résolution

Il faut procéder par étapes. On va résoudre l'équation $2(7-2x) = x+5$

$2(7-2x) = x+5$ $14-4x = x+5$	**Etape 1** : on enlève les parenthèses(en développant).
$14-4x + 4x = x+5 + 4x$ $14 = 5x+5$ $14 - 5 = 5x+5 - 5$ $9 = 5x$	**Etape 2** : on regroupe toutes les inconnues d'un côté du "=" et tous les nombres de l'autre côté du "=" en utilisant les propriétés de la balance 1 et 2.
$5x = 9$ $\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ $x = \frac{9}{5}$	A ce stade, il ne doit rester qu'une $\times$ ou une $\div$! **Etape 3** : si nécessaire, on utilise la propriété de la balance 3 ou 4 pour arriver à quelque chose de la forme "$x = ...$"
$\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ $x = \frac{9}{5}$	**Etape 4** : On teste l'égalité de départ pour la solution trouvée (ici, $x = \frac{9}{5}$) : si on trouve le même résultat, c'est que la solution est correcte !
Cette équation admet une solution : $\frac{9}{5}$	**Etape 5** : on écrit la conclusion.

2) Équation à produit nul

Propriété

Méthode - Se ramener à une équation produit nul

- On écrit tous les termes à gauche de l'équation
- On FACTORISE $\rightarrow$ soit grâce à un facteur commun
  $\rightarrow$ soit grâce à un identité remarquable
- On applique le produit nul.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$(7+x)(5x-3)-2x(7+x)=0$

$(2x-1)^2-25=0$

3) Équation à quotient nul

Propriété

Méthode - Résoudre une équation quotient nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{7+x}{2x+6}-2=0$

1) On détermine la valeur interdite :
L'expression $\dfrac{7+x}{2x+6}-2$ **n'est pas définie** si $2x+6=0$ soit $2x=-6$ donc $x=-3$
La valeur interdite est -3 . Il faut donc que $x \neq -3$

2) On transforme l'expression pour avoir une seule fraction en mettant au même dénominateur :
$\dfrac{7+x}{2x+6}-2=0 \iff \dfrac{7+x-2(2x+6)}{2x+6}=0 \iff \dfrac{-3x-5}{2x+6}=0$

3) On résout « *numérateur = 0* »
$-3x-5=0 \iff -3x=5 \iff x=-\dfrac{5}{3}$

4) On conclut en vérifiant bien que les solutions ne soient pas des valeurs interdites
$S=\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$