

Chapitre 05 - Fonction trigonométriques Correction des exercices

Exercices obligatoires

Exercice 1

Résoudre l'équation donnée dans l'intervalle I.

1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$.

2) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$.

3) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$.

4) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$.

5) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $I = [0; 2\pi[$.

6) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ avec $I =]-\pi; \pi[$.

7) $\cos(x) = 0$ avec $I =]-\pi; \pi[$.

8) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ avec $I =]-\pi; \pi[$.

9) $\sin(x) = 0$ avec $I =]-\pi; \pi[$.

10) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $I = [0; 4\pi[$.

Exercice 2 - Cet exercice utilise des notions d'autres chapitres.

1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2X^2 - 3X + 1 = 0$

b) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation : $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$

2) Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $\cos^2(x) + \sqrt{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$.

b) $\sin^2(x) - \cos^2(x) = 0$.

Exercice 3

Pour chacune des fonctions définies sur \mathbb{R} proposées, étudier sa parité et démontrer qu'elle est T-périodique.

1) $f(x) = 3 + 2\cos(x)$; $T = 2\pi$.

2) $g(x) = \sin^2(x)$; $T = \pi$.

3) $h(x) = |\sin(x)|$; $T = \pi$.

4) $p(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$; $T = \pi$.

Exercice 4

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes, définies sur \mathbb{R} .

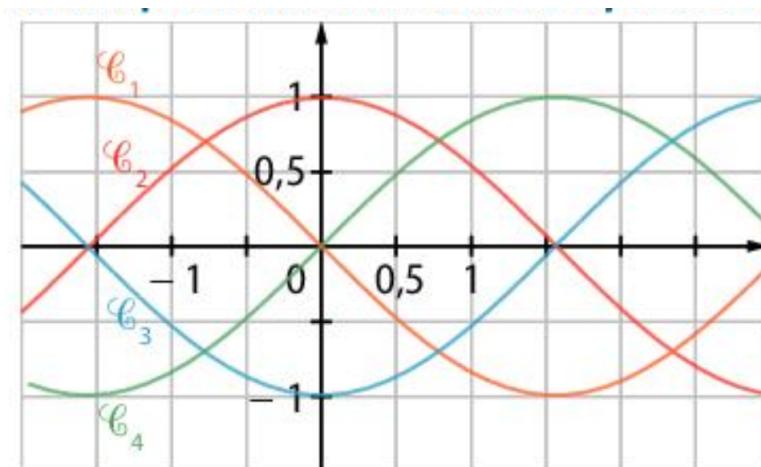
1) $f(x) = x\cos(x)$

2) $g(x) = x\sin(x)$

3) $h(x) = x^2\cos(x)$

4) $p(x) = x\sin^2(x)$

Pour les exercices 5 à 8, on considère les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 données dans le repère ci-dessous. Associer chaque fonction à sa courbe représentative.



Exercice 5

$f(x) = \sin(x)$; $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $h(x) = \sin(x + \pi)$.

Exercice 6

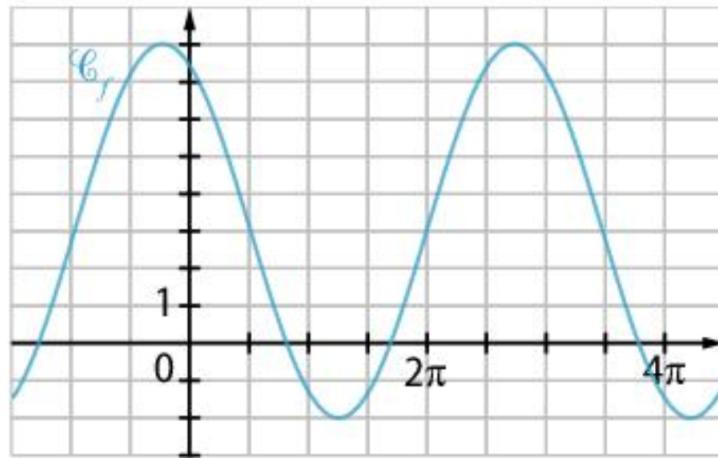
$f(x) = \cos(x)$; $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $h(x) = \cos(x + \pi)$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3 - 5 \sin\left(\frac{2x - \pi}{3}\right)$$

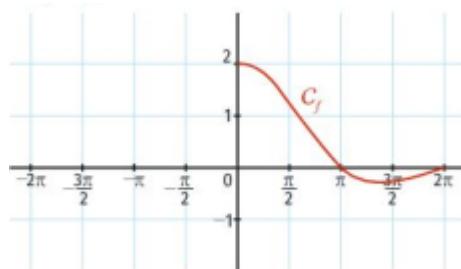
On donne ci-dessous une partie de sa représentation graphique.



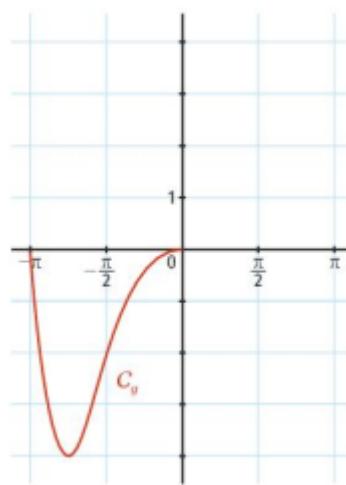
- 1) On admet que 3 a exactement deux antécédents par f dans l'intervalle $[0; 3\pi]$.
 - a) À l'aide du graphique, conjecturer les valeurs exactes de ces antécédents.
 - b) Montrer par le calcul que ces valeurs conviennent.
- 2) Démontrer que la fonction f est 3π -périodique.
- 3) En déduire l'ensemble des antécédents de 3 par f dans \mathbb{R} .

Exercice 10

Sachant que la fonction f est une fonction paire, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.

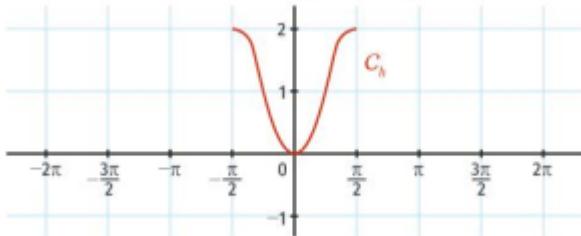
**Exercice 11**

Sachant que la fonction g est une fonction impaire, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur $[-\pi; \pi]$.

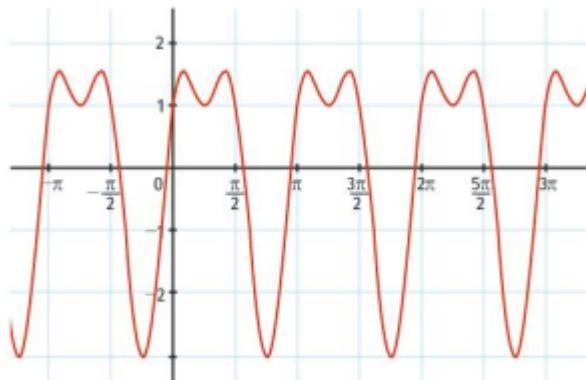


Exercice 12

Sachant que la fonction h est une fonction π -périodique, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.

**Exercice 13**

Déterminer graphiquement la période de la fonction f dont on fournit la courbe représentative.

**Exercices facultatifs****Exercice 14**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x) + x^2$.

- 1) Montrer que f est une fonction paire.

$$f(-x) = \cos(-x) + (-x)^2 = \cos(x) + x^2 = f(x).$$

On a bien $f(-x) = f(x)$ donc la fonction f est paire.

- 2) Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

La courbe représentative de f a une symétrie d'axe l'axe des ordonnées.

Exercice 15

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x + \sin(x)$.

- 1) Montrer que g est une fonction impaire.

$$g(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin(x) = -g(x).$$

On a bien $g(-x) = -g(x)$ donc la fonction g est impaire.

- 2) Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de g ?

La courbe représentative de g a une symétrie centrale avec l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice 16

En exprimant, pour tout réel x , $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$, dire si les fonctions définies sur \mathbb{R} ci-dessous sont paires ou impaires.

- 1) $f : x \mapsto x \times \sin(x)$

$$f(-x) = -x \times \sin(-x) = -x \times (-\sin(x)) = x \times \sin(x) = f(x)$$

La fonction est paire.

- 2) $f : x \mapsto x \times \cos(x)$

$$f(-x) = -x \times \cos(-x) = -x \times (\cos(x)) = -f(x)$$

La fonction est impaire.

- 3) $f : x \mapsto (\sin(x))^2$

$f(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin(x))^2 = (\sin(x))^2 = f(x)$
La fonction est paire.

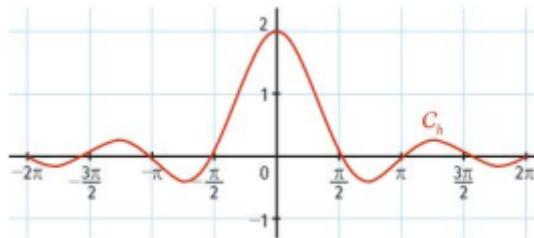
4) $f : x \mapsto \frac{x^2}{2 + \cos(x)}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2 + \cos(-x)} = \frac{x^2}{2 + \cos(x)} = f(x)$$

La fonction est paire.

Exercice 17

La fonction h dont la représentation graphique est fournie semble-t-elle paire ? impaire ? périodique ?



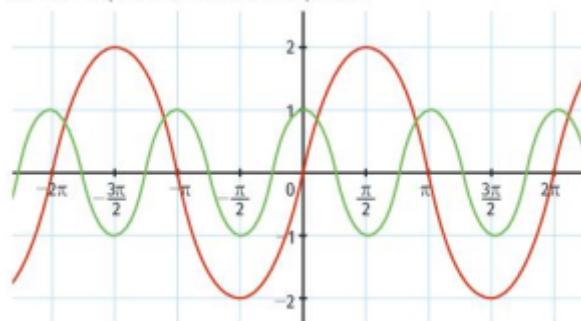
La fonction h semble paire (symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) mais pas périodique.

Exercice 18

Donner à chaque courbe représentative la fonction qui lui correspond. Justifier la réponse.

1) $f : x \mapsto 2 \sin(x)$

2) $g : x \mapsto \cos(2x)$



On a $f(0) = 2 \sin(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

La courbe qui représente la fonction f passe par le point de coordonnée $(0; 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$. Il s'agit de la courbe rouge.

De même, on a $g(0) = \cos(2 \times 0) = 1$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$

La courbe qui représente la fonction f passe par le point de coordonnée $(0; 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$. Il s'agit de la courbe verte.

Exercice 19

Dans chacun des cas suivants, déterminer, s'il existe, un nombre réel x vérifiant les conditions données. On pourra s'aider du cercle trigonométrique.

1) $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

a) $x \in [0; \pi[$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3\pi}{4} \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

x_2 est la seule solution dans l'intervalle $[0; \pi[$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}$

b) $x \in \left] -\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3\pi}{4} \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

x_1 est la seule solution dans l'intervalle $\left] -\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} \right\}$

2) $\sin(x) = \frac{1}{2}$

a) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right[$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

x_2 est la seule solution dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right[$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{ \frac{5\pi}{6} \right\}$

b) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

x_1 est la seule solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$

3) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $x \in [\pi; 2\pi]$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

On en déduit les solutions sur \mathbb{R} .

L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

On teste différentes valeurs de k pour trouver les valeurs qui appartiennent à l'intervalle souhaité $[\pi; 2\pi]$ (ou $\left[\frac{6\pi}{6}; \frac{12\pi}{6}\right]$)

$$k=1 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin \left[\frac{6\pi}{6}; \frac{12\pi}{6}\right] \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in \left[\frac{6\pi}{6}; \frac{12\pi}{6}\right] \end{cases}$$

On peut maintenant conclure : $S = \left\{ \frac{11\pi}{6} \right\}$

b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

On en déduit les solutions sur \mathbb{R} .

L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

On teste différentes valeurs de k pour trouver les valeurs qui appartiennent à l'intervalle souhaité $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (ou $\left[\frac{3\pi}{6}; \frac{9\pi}{6}\right]$)

$$k=1 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin \left[\frac{3\pi}{6}; \frac{9\pi}{6}\right] \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \notin \left[\frac{3\pi}{6}; \frac{9\pi}{6}\right] \end{cases}$$

On peut maintenant conclure : $S = \emptyset$

4) $\cos(x) = 3$ avec $x \in [0; 2\pi]$

$S = \emptyset$ car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$