Chapitre 3

Fonction sinus et cosinus

I. Résoudre une équation trigonométrique

Méthode - Résoudre une équation trigonométrique

Enoncé :

Résoudre sur $[3\pi;5\pi]$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Réponse :**

On commence par étudier la solution dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

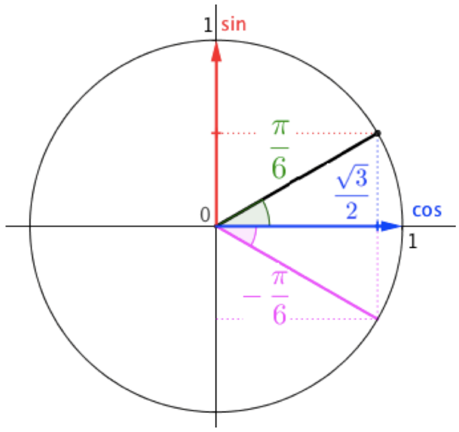
$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

On en déduit les solutions sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

On teste différentes valeurs de k pour trouver les valeurs qui appartiennent à l'intervalle souhaité $[3\pi;5\pi]$ (ou $\left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right]$)



$$k=1 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \end{cases}$$

$$k=2 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 4\pi = \dfrac{25\pi}{6} \in \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 4\pi = \dfrac{23\pi}{6} \in \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \end{cases}$$

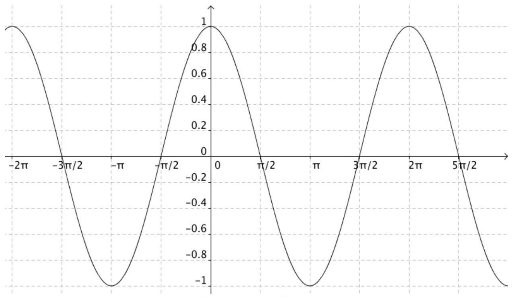
$$k=3 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 6\pi = \dfrac{37\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 6\pi = \dfrac{35\pi}{6} \notin \left[\dfrac{18\pi}{12};\dfrac{30\pi}{6}\right] \end{cases}$$

On peut maintenant conclure : $S = \left\{\dfrac{23\pi}{6};\dfrac{25\pi}{6}\right\}$

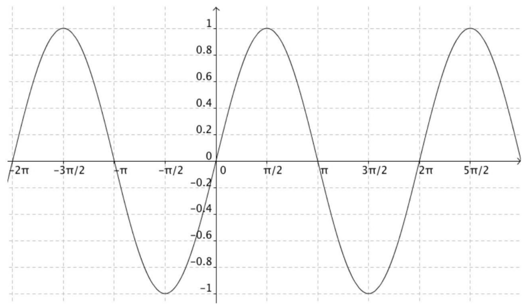
II. Définitions et représentations graphiques

Définitions

- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La fonction sinus, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



Fonction cosinus



Fonction sinus

III. Périodicité

Propriétés

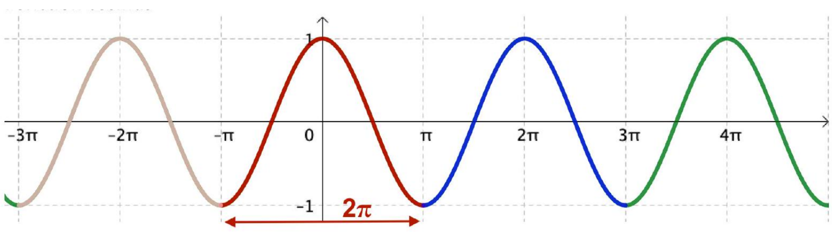
- $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
- $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

Démonstration

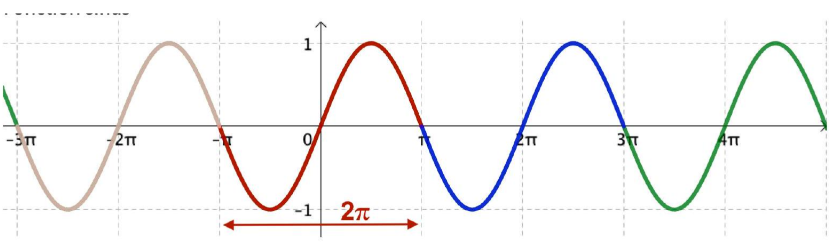
Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π.

1) Fonction cosinus



2) Fonction sinus



IV. Parité

Définitions

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une fonction impaire.

Remarques

- Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$.
- Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.

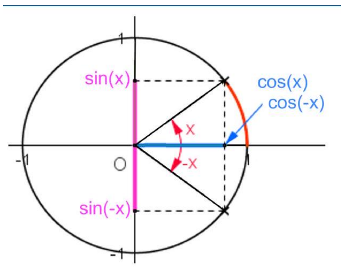
Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés

- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstration

Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



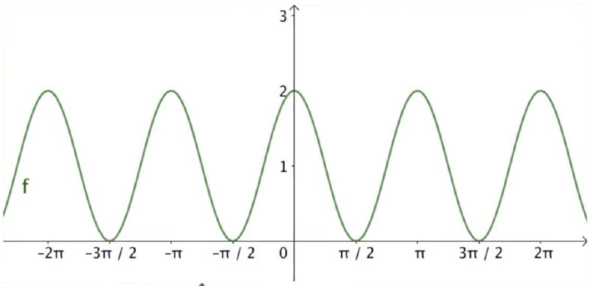
Remarques

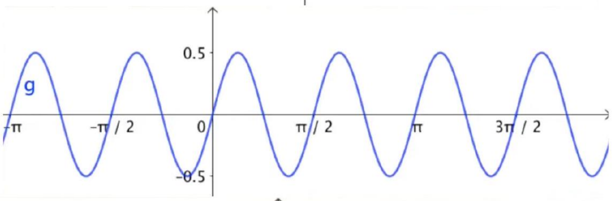
- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

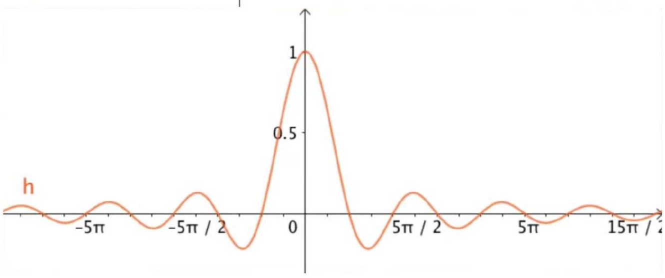
V. Méthodes

Méthode - Reconnaître graphiquement la parité et la périodicité d'une fonction

Enoncé :
Déterminer graphiquement la parité et la périodicité des fonctions f, g et h représentées ci-dessous :



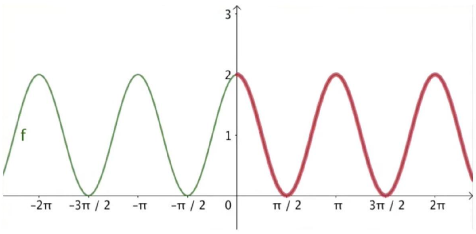




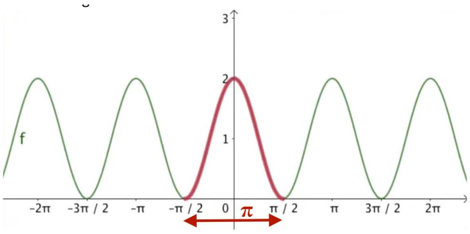
Corrigé :

- FONCTION f :

La fonction f est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

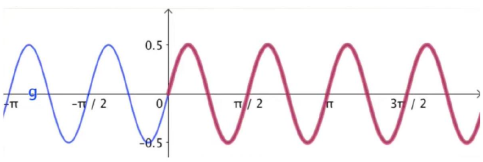


La fonction f est périodique de période π car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π.

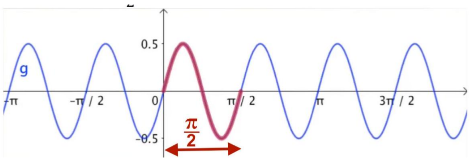


- FONCTION g :

La fonction g est impaire car sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

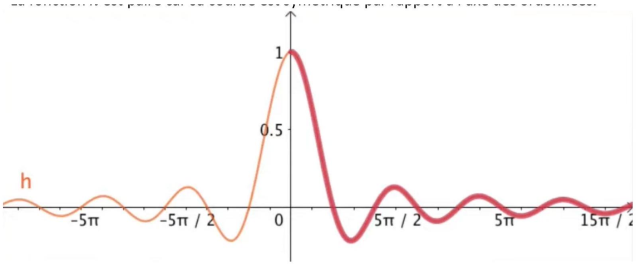


La fonction g est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$.



- FONCTION h :

La fonction h est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



La fonction h n'est pas périodique, on ne retrouve pas le même morceau de courbe sur différents intervalles.

Méthode - Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Enoncé :

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

Corrigé :

On a :

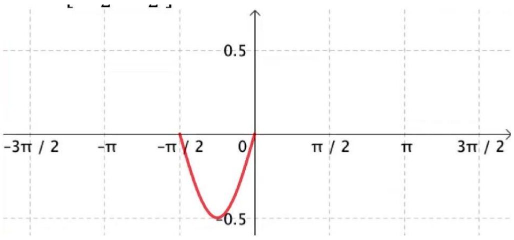
$f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin(x) + \sin(2x) = -(\sin(x) - \sin(2x)) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Méthode - Compléter un graphique par parité et périodicité

Enoncé :

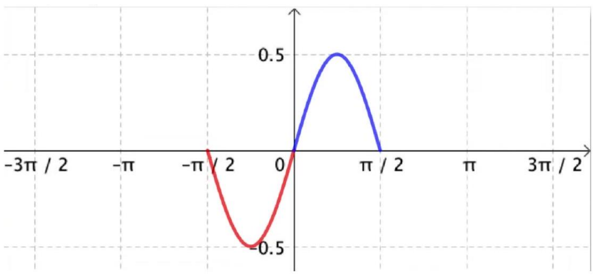
Soit f une fonction impaire et périodique de période π. Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.



Corrigé :

1$^{\text{ère}}$ étape : La fonction est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

On complète donc par symétrie centrale.



2e étape : La fonction est périodique de période π. On retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π.
Le morceau déjà tracé a pour longueur π, on le reproduit à gauche et à droite.