Produit scalaire
Exercices obligatoires

Exercice 1
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 8$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$;

2) $\|\vec{u}\| = 1, \|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$;

3) $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi[2\pi]$;

4) $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 2
Soit A, B et C trois points distincts.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec :

$$\mathrm{AB} = 5, \mathrm{AC} = 6 \text{ et } (\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

2) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ avec :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{6}, \mathrm{BC} = \sqrt{8} \text{ et } (\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = \frac{5\pi}{6}[2\pi].$$

Exercice 3
Dans chaque cas, déterminer le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1) $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{7\pi}{6}[2\pi]$

2) $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{20\pi}{3}[2\pi]$

3) $(\vec{u}, \vec{v}) = -\dfrac{31\pi}{4}[2\pi]$

4) $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{67\pi}{15}[2\pi]$

Exercice 4
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = \frac{3}{4}, \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{5}$.
Calculer $(-6\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 3\vec{v})$.

Exercice 5
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{15}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{23}$.
Calculer $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{u})$.

Exercice 6
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 1,2$ et $\|\vec{v}\| = 3,5$.
Calculer $(2\vec{v} - 5\vec{u}) \cdot (2\vec{v} + 5\vec{u})$.

Exercice 7
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. Calculer les expressions suivantes.

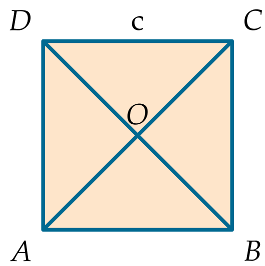
1) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

2) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v})$

Exercice 8
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{12}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.
Calculer $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 3\vec{v})$.

Exercice 9

On considère un carré ABCD de centre O et de côté c. Calculer les produits scalaires suivants.

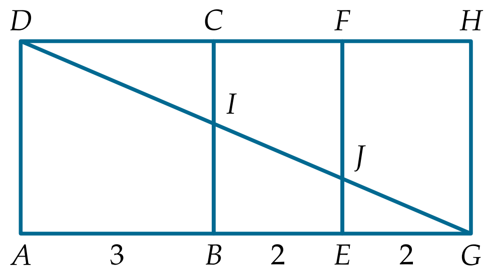


1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
4) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$
5) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$
6) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$
7) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC}$

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = c^2$ par projection orthogonale du point C sur le segment $[AB]$.
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{c^2}{2}$ par projection orthogonale du point O sur le segment $[AB]$
3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -c^2$
4) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$
5) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = c^2$ par projection orthogonale du point D sur le segment $[AB]$
6) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}c)^2 = -c^2$
7) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ car les 2 vecteurs sont orthogonaux.

Exercice 10

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré ABCD dont le côté mesure 3 , accolé à deux rectangles identiques BEFC et EGHF de largeur 2.
En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

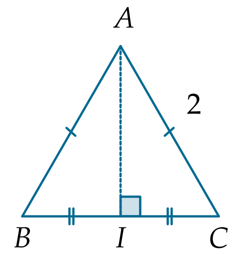


1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$
3) $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG}$
4) $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD}$
5) $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG}$
6) $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

1) On projette le vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 3 = 9$
2) On projette le vecteur $\overrightarrow{BF}$ sur le vecteur $\overrightarrow{BE}$:
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = -3 \times 2 = -6$
3) On projette le vecteur $\overrightarrow{EI}$ sur le vecteur $\overrightarrow{EB}$:
$\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AG} = -2 \times 7 = -14$
4) On projette le vecteur $\overrightarrow{GD}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HD}$:
$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{HD} = -2 \times 7 = -14$
5) Les droites (BC) et (GH) sont parallèles donc on projette le vecteur $\overrightarrow{IC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HG}$.
Pour calculer la longueur IC, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle GHD
$\frac{IC}{GH} = \frac{DC}{DH}$, donc $IC = \frac{DC \times GH}{DH} = \frac{3 \times 3}{7} = \frac{9}{7}$
Alors $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG} = -\frac{9}{7} \times 3 = -\frac{27}{7}$
6) Pour calculer la longueur EJ, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle AGD
$\frac{EJ}{AD} = \frac{GE}{GA}$, donc $EJ = \frac{GE \times AD}{GA} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{FA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{FE}$:
$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FE} = -\dfrac{6}{7} \times 3 = -\dfrac{18}{7}$

Exercice 11



Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ **2)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$ **3)** $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$

Avec le projeté orthogonal

1) On projette $\overrightarrow{BA}$ sur (BC)
Alors $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BI}\| = 2 \times 1 = 2$

2) On projette $\overrightarrow{BA}$ sur (BI)
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BI} = \|\overrightarrow{BI}\| \times \|\overrightarrow{BI}\| = 1 \times 1 = 1$

3) On projette $\overrightarrow{AC}$ sur (AI)
Pour trouver la longueur du segment $[AI]$, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AIC :
$AC^2 = AI^2 + CI^2$, donc $AI^2 = AC^2 - CI^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ et enfin $AI = \sqrt{3}$ cm. On obtient alors :
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} = \|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AI}\| = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

Avec la définition

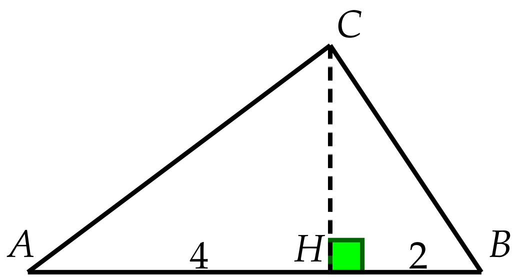
1) ABC est un triangle équilatéral, donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{3}$.
Alors $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BA}\| \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 2$

2) I étant le pied de la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABC, il est également le milieu du segment $[BC]$, donc $BI = 1$ cm.
De plus, la symétrie du produit scalaire implique que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ et comme $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{3}$, on obtient :
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BI}\| \times \|\overrightarrow{BA}\| \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

3) La droite (AI) est également la bissectrice du sommet A du triangle ABC, donc $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{6}$.
Pour trouver la longueur du segment $[AI]$, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AIC :
$AC^2 = AI^2 + CI^2$, donc $AI^2 = AC^2 - CI^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ et enfin $AI = \sqrt{3}$ cm. On obtient alors :
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

Exercice 12

Dans le cas ci-dessous, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide des informations données.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 6 \times 4 = 24$

Exercice 13

ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux de côté 4. Calculer les produits scalaires suivants.

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

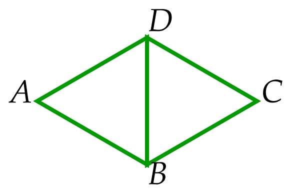
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$

4) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$

5) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) = 4 \times 4 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 16 \times \dfrac{1}{2} = 8$

2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\widehat{ABC}\right) = 4 \times 4 \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 16 \times \dfrac{-1}{2} = -8$

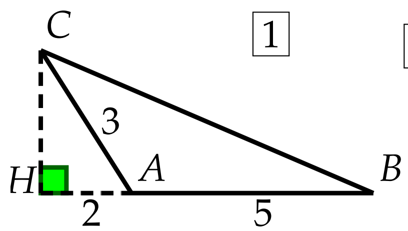
3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) = -\frac{1}{2}DB \times DB = -\dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = -8$

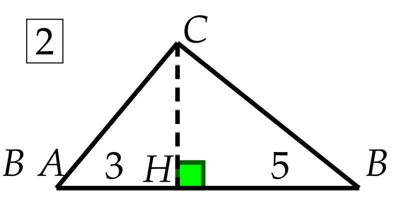
4) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ car $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux (les diagonales d'un losange se coupent $\perp$).

5) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = -AD \times AD = -4 \times 4 = -16$

6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}AC \times AC = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{12} \times 2\sqrt{12} = 24$

Exercice 14 Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.





1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -5 \times 2 = -10$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 8 \times 3 = 24$

Exercice 15

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1) $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(3;-1)$;

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times (-1) = 1$

2) $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(12;7)$;

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 12 + 3 \times 7 = 9$

3) $\vec{u}\left(-\dfrac{11}{4};-15\right)$ et $\vec{v}\left(4;-\dfrac{2}{5}\right)$;

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{11}{4}\times 4 + (-15)\times(-\dfrac{2}{5}) = -5$

4) $\vec{u}(-1+\sqrt{3};-3)$ et $\vec{v}(-1-\sqrt{3};-1)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1+\sqrt{3})\times(-1-\sqrt{3}) + (-3)\times(-1) = 1$

Exercice 16

On considère les points $\mathrm{A}(5;-3), \mathrm{B}(-2;7), \mathrm{C}\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$ et $\mathrm{D}\left(-5;\dfrac{3}{4}\right)$.

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4,5\\0,75\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5,5\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\-6,25\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-10\\3,75\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1,5\\-7\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -7\times -4,5 + 10\times 0,75 = 39$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = -5,5\times(-3) + 3\times(-6,25) = -2,25$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -10\times 1,5 + 3,75\times(-7) = -41,25$

Exercice 17

Soit A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives : $(-4;1), (-1;2)$ et $(1;-4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x_A - x_B\\y_A - y_B\end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4-(-1)\\1-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-(-1)\\-4-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -3\times 2 + (-1)\times(-6) = 0$

2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est donc rectangle en B. De plus $AB \neq BC$ donc le triangle n'est pas isocèle.

Exercice 18

Soit ABC un triangle. Dans chaque cas, calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

1) $AB = 3, AC = 4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\sqrt{3}$.

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ soit

$6\sqrt{3} = 3\times 4\times\cos(\widehat{BAC})$ soit

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{6\sqrt{3}}{3\times 4}$ d'ou

$\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

2) $AB = 16, AC = 48$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -133$.

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ soit

$-133 = 16\times 48\times\cos(\widehat{BAC})$ soit

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-133}{16\times 48}$ d'ou

$\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{-133}{768}\right) \approx 99,97°$

On arrondira au degré près.

Exercice 19
Soit A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives :
$(-5;-3), (-1;-6)$ et $(-5;-1)$.

1) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -5-(-5) \\ -3-(-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $CA = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2$
$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -1-(-5) \\ -6-(-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $CB = \sqrt{4^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \times 4 + (-2) \times (-5) = 10$

2) En déduire $\widehat{BCA}$ en degré à 10^{-2} près.

On a $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \times BC \times \cos(\widehat{BCA})$ soit
$10 = 2 \times \sqrt{41} \times \cos(\widehat{BCA})$ soit
$\cos(\widehat{BCA}) = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$ d'ou
$\widehat{BCA} = \arccos\left(\dfrac{5}{\sqrt{41}}\right) \approx 38,66°$

Exercice 20
Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{5}$ et $\mathrm{BC} = \sqrt{10}$.
Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

On utilise la formule du produit scalaire dans un triangle : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \dfrac{1}{2}(13+5-10) = 4$
$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - AC^2) = \dfrac{1}{2}(13+10-5) = 9$

Exercice 21
Soit ABC un triangle tel que $AB = \dfrac{3}{2}$, $AC = 6$ et $\mathrm{BC} = \dfrac{5}{2}$. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) = 16$$

Exercice 22
Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{50}$, $AC = \sqrt{90}$ et $BC = \sqrt{41}$.

1) **a)** Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(50+90-41) = 49,5$$

b) En écrivant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction du cosinus, déduire une valeur approchée en degré à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.

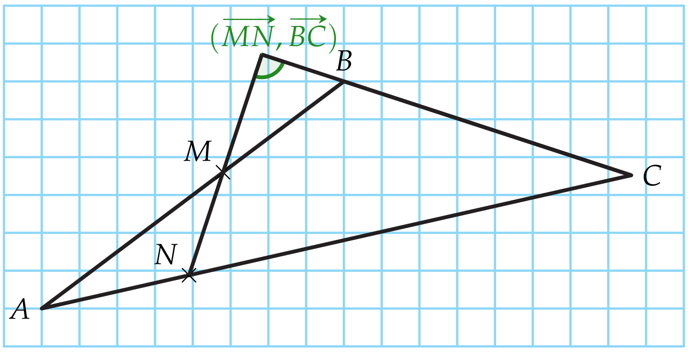
On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ soit
$49,5 = \sqrt{50} \times \sqrt{90} \times \cos(\widehat{BAC})$ soit
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{49,5}{\sqrt{50} \times \sqrt{90}}$ d'ou
$\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{49,5}{\sqrt{50} \times \sqrt{90}}\right) \approx 42,4°$

2) Calculer les valeurs approchées à 10^{-1} près des autres angles du triangle ABC.

Pour l'angle $\widehat{BCA}$:
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(41 + 90 - 50) = 40,5$
On a $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CB \times AC \times \cos(\widehat{BCA})$ soit
$40,5 = \sqrt{41} \times \sqrt{90} \times \cos(\widehat{BCA})$ soit
$\cos(\widehat{BCA}) = \dfrac{40,5}{\sqrt{41} \times \sqrt{90}}$ d'ou
$\widehat{BCA} = \arccos\left(\dfrac{40,5}{\sqrt{41} \times \sqrt{90}}\right) \approx 48,2°$
Pour l'angle $\widehat{ABC}$:
La somme des angles dans un triangle est de 180° donc :
$\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BCA} - \widehat{BAC} = 180 - 48,2 - 42,4 = 89,4°$

Exercice 23 - Ex 48 p 253

Soit le triangle ABC tel que $AB = 10, AC = 16$ et $BC = 8$ et soit les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



1) Calculer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - AC^2)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 - AB^2)\right) \\
&= \frac{3}{10}\left(10^2 + 8^2 - 16^2\right) + \frac{1}{8} \times \left(16^2 + 8^2 - 10^2\right) \\
&= -\frac{1}{10} = -0,1
\end{aligned}$$

2) Calculer MN^2.

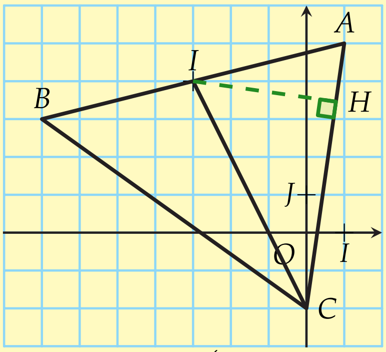
$$\begin{aligned}
MN^2 = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \\
&= \left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{9}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{9}{25} \times AB^2 - \frac{3}{20}(AB^2 + AC^2 - BC^2) + \frac{1}{16} \times AC^2 \\
&= \frac{9}{25} \times 10^2 - \frac{3}{20}(10^2 + 16^2 - 8^2) + \frac{1}{16} \times 16^2
\end{aligned}$$

$= \dfrac{41}{5} = 8,2$

3) En déduire une valeur approchée en degré à 10^{-1} près de l'angle géométrique $|(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC})|$.

On sait que $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{10} = -0,1$ et que $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = MN \times BC \times \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC})$
D'ou :
$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \arccos\left(\dfrac{-0,1}{\sqrt{8,2} \times 8}\right) \approx 90,25°$

Exercice 24 - Ex 54 p 254 Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respectives $(1;5)$, $(-7;3)$, $(0;-2)$ et soit I le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle ACI.



L'aire du triangle ACI est $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times IH}{2}$ or dans le triangle rectangle AIH, on a :
$IH = AI \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)$ donc l'aire du triangle ACI est $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times AI \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)}{2}$
On calcule l'angle $\widehat{BAC}$ à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$:

Le point

I a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ soit $I(-3;4)$.

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -3-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow AI = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-1 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} \Longrightarrow AC = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}$

D'une part : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \times (-1) + (-1) \times (-7) = 11$ et d'autre part :
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = AI \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = \sqrt{17} \times \sqrt{50} \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

On a donc $\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{11}{\sqrt{17} \times \sqrt{50}}\right) \approx 67,8°$ Finalement :

$$\mathcal{A} = \dfrac{AC \times AI \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)}{2} = \dfrac{\sqrt{50} \times \sqrt{17} \times \sin\left(\arccos\left(\dfrac{11}{\sqrt{17} \times \sqrt{50}}\right)\right)}{2} = \dfrac{27}{2} = 13,5$$

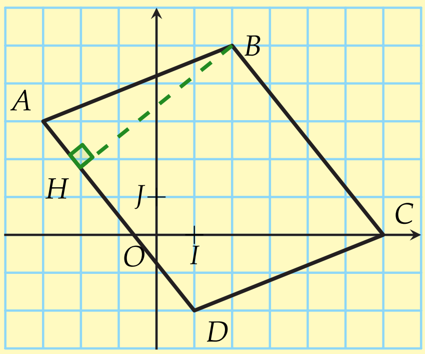
Exercice 25 - Ex 55 p 254 Soit A, B, C, D quatre points du plan de coordonnées respectives : $(-3;3)$, $(2;5)$, $(6;0)$ et $(1;-2)$.

1) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6-1 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc d'après la règle du parallélogramme, ABCD est un parallélogramme.



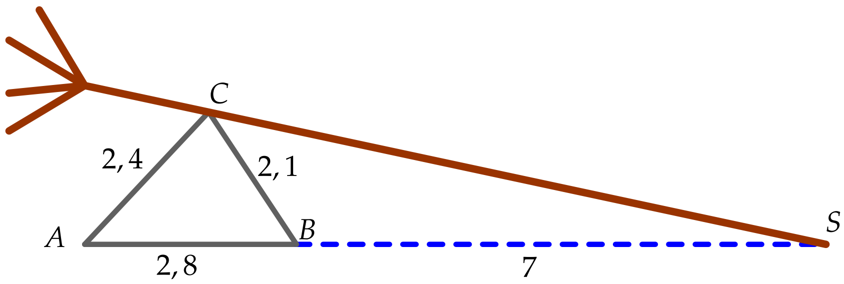
2) Déterminer une valeur approchée de l'aire de $ABCD$ à 10^{-2} près.

L'aire du parallélogramme est $\mathcal{A} = HB \times AD$ or dans le triangle rectangle ABH, on a :
$HB = AB \times \sin\left(\widehat{BAD}\right)$ donc l'aire du parallélogramme est $A = AD \times AB \times \sin\left(\widehat{BAD}\right)$
On calcule l'angle $\widehat{BAD}$ à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ -2-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times 4 + 2 \times (-5) = 10$
On a $AD = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$ et $AB = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$
D'autre part $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \times AB \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) = \sqrt{41} \times \sqrt{29} \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$
Donc $10 = \sqrt{41} \times \sqrt{29} \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) \iff \widehat{BAD} = \arccos\left(\dfrac{10}{\sqrt{41} \times \sqrt{29}}\right) \approx 73,14°$
$\mathcal{A} = AD \times AB \times \sin\left(\widehat{BAD}\right) = \sqrt{41} \times \sqrt{29} \times \sin\left(\arccos\left(\dfrac{10}{\sqrt{41} \times \sqrt{29}}\right)\right) = 33$

Exercice 26 - Ex 70 p 255

Dans un jeu vidéo, Super Ninja court pour échapper à ses ennemis. Il arrive au bord d'une rivière de 7 mètres de large et aperçoit un rocher triangulaire sur l'autre rive. Vite ! Super Ninja doit couper un arbre pour traverser la rivière en le posant sur la pointe du rocher. Mais quelle longueur doit avoir au minimum son arbre ? Heureusement que Super Ninja connaît les dimensions (en mètre) du rocher...

En utilisant les données de la figure ci-dessous, calculer SC. On arrondira au mètre près.



Dans le triangle BAC, on calcule l'angle $\widehat{BAC}$ à l'aide du produit scalaire.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(2,8^2 + 2,4^2 - 2,1^2\right) = 4,595$
D'autre part : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2,8 \times 2,4 \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
d'où : $4,595 = 2,8 \times 2,4 \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \iff \cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{4,595}{2,8 \times 2,4} = \dfrac{919}{1344}$
On se place maintenant dans le triangle ASC
$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = AS \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 9,8 \times 2,4 \times \dfrac{919}{1344} = \dfrac{6433}{400}$
D'autre part : $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AS^2 + AC^2 - SC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(9,8^2 + 2,4^2 - SC^2\right)$
d'où :

$$\begin{aligned} \frac{6433}{400} &= \frac{1}{2}\left(9,8^2 + 2,4^2 - SC^2\right) \\ \iff \frac{6433}{200} &= 9,8^2 + 2,4^2 - SC^2 \\ \iff SC^2 &= 9,8^2 + 2,4^2 - \frac{6433}{200} \\ \iff SC^2 &= 69,635 \\ \iff SC &= \sqrt{69,635} \approx 8,34m \end{aligned}$$