Fonctions polynôme de degré 2

Correction de la fiche d'exercices

Reconnaître une fonction polynôme de degré 2

Exercice 1

Compléter le tableau suivant.

Correction :

$f(x) = \dots$	Fonction polynôme de degré 2 ?		$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$
	oui	non			
$3x^2 - 2x + 5$	$\times$		3	-2	5
$-x^2 + 4$	$\times$		-1	0	4
$5x - 7$		$\times$			
$x^3 + 2x^2$		$\times$			
$(x-2)(3x+1)$	$\times$		3	-5	-2
$7 - 2x + 0,5x^2$	$\times$		0,5	-2	7
$(x+1)^2 - x^2$		$\times$			

Détails :

- $5x - 7$ est de degré 1 (pas de terme en x^2) et $x^3 + 2x^2$ est de degré 3.
- $(x-2)(3x+1) = 3x^2 + x - 6x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$.
- $(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$: les termes en x^2 s'annulent, c'est une fonction affine.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, dire s'il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2. Si oui, donner les valeurs de a, b et c.

a) $f(x) = -2x^2 + x - 3$

b) $g(x) = 4x^2$

c) $h(x) = 1 - x^2 + 6x$

d) $k(x) = 3x(x-4)$

e) $m(x) = (2x-1)(2x+1) - 4x^2$

f) $p(x) = (x-3)^2$

Correction :

a) $f(x) = -2x^2 + x - 3$: oui, avec $a = -2$, $b = 1$ et $c = -3$.

b) $g(x) = 4x^2$: oui, avec $a = 4$, $b = 0$ et $c = 0$.

c) $h(x) = 1 - x^2 + 6x = -x^2 + 6x + 1$: oui, avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = 1$.

d) $k(x) = 3x(x-4) = 3x^2 - 12x$: oui, avec $a = 3$, $b = -12$ et $c = 0$.

e) $m(x) = (2x-1)(2x+1) - 4x^2 = 4x^2 - 1 - 4x^2 = -1$: non, m est une fonction constante.

f) $p(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$: oui, avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = 9$.

Éléments caractéristiques d'une parabole (lecture graphique)

Exercice 3

On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

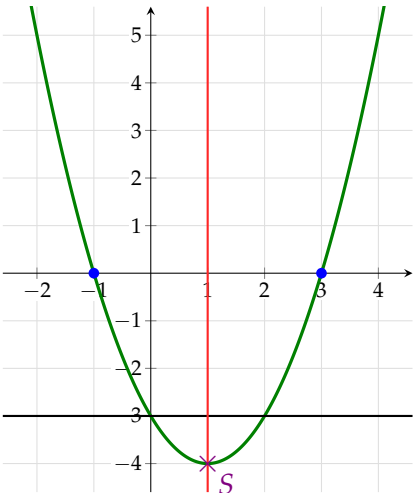
1) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -3$.

3) En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la courbe.

4) Calculer l'ordonnée du sommet S de la parabole, puis donner ses coordonnées.

5) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ? Préciser sa valeur.



Correction :

1) La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3.
Les solutions de $f(x) = 0$ sont $x = -1$ et $x = 3$.

2) On trace la droite horizontale d'équation $y = -3$: elle coupe la courbe aux points d'abscisses 0 et 2.
Les solutions de $f(x) = -3$ sont $x = 0$ et $x = 2$.

3) L'axe de symétrie passe par le milieu des deux solutions : $(-1 + 3) : 2 = 1$.
L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = 1$.

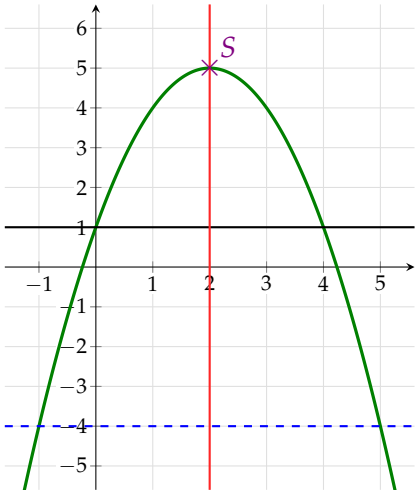
4) Le sommet est sur l'axe de symétrie, donc son abscisse est 1.
$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$. Le sommet a pour coordonnées $S(1; -4)$.

5) Les branches de la parabole sont tournées vers le haut ($a = 1 > 0$) : f admet un **minimum** égal à -4, atteint pour $x = 1$.

Exercice 4

On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1.$$



1) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 1$.

2) Tracer l'axe de symétrie de la courbe et donner son équation.

3) Donner les coordonnées du sommet S de la parabole. Justifier par un calcul.

4) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -4$.

5) Le coefficient a est-il positif ou négatif ? Était-ce prévisible sur le graphique ?

Correction :

1) La droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe aux points d'abscisses 0 et 4.
Les solutions de $f(x) = 1$ sont $x = 0$ et $x = 4$.

2) $(0 + 4) : 2 = 2$. L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = 2$ (en rouge sur le graphique).

3) L'abscisse du sommet est 2 et :

$$f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5.$$

Le sommet a pour coordonnées $S(2;5)$.

4) La droite d'équation $y = -4$ (en pointillés) coupe la courbe aux points d'abscisses -1 et 5.
Les solutions de $f(x) = -4$ sont $x = -1$ et $x = 5$.

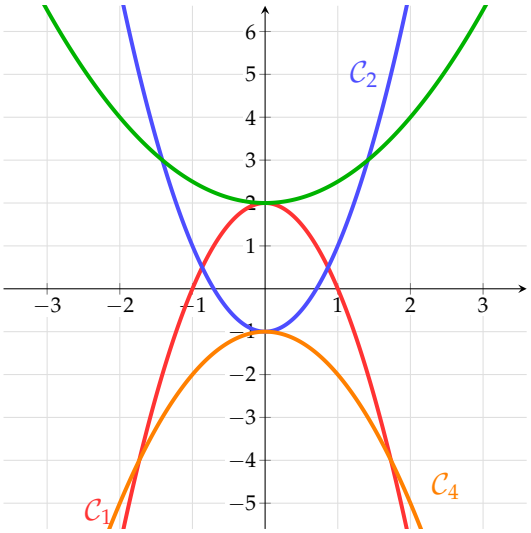
5) $a = -1 < 0$. C'était prévisible : les branches de la parabole sont tournées vers le bas (f est d'abord croissante, puis décroissante).

Associer une fonction $x \mapsto ax^2 + c$ à sa courbe

Exercice 5

Associer chaque fonction à sa représentation graphique. Justifier.

$$f(x) = 2x^2 - 1$$
$$g(x) = -x^2 - 1$$
$$h(x) = \frac{x^2}{2} + 2$$
$$k(x) = -2x^2 + 2$$



Correction :

Pour une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + c$, le sommet de la parabole est le point $(0; c)$.

— $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ ont pour sommet $(0; -1)$, donc $c = -1$: il s'agit de f et g.
$\mathcal{C}_2$ est tournée vers le haut ($a > 0$) : $\mathcal{C}_2$ représente f ($a = 2$).
$\mathcal{C}_4$ est tournée vers le bas ($a < 0$) : $\mathcal{C}_4$ représente g ($a = -1$).

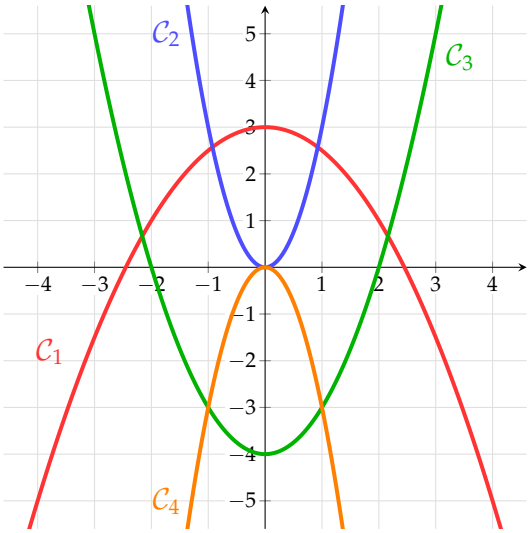
— $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ ont pour sommet $(0; 2)$, donc $c = 2$: il s'agit de h et k.
$\mathcal{C}_3$ est tournée vers le haut ($a > 0$) : $\mathcal{C}_3$ représente h ($a = \frac{1}{2}$).
$\mathcal{C}_1$ est tournée vers le bas ($a < 0$) : $\mathcal{C}_1$ représente k ($a = -2$).

Exercice 6

1) Associer chaque fonction à sa représentation graphique. Justifier.

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + 3$$
$$h(x) = 3x^2$$
$$k(x) = -3x^2$$

2) Pour chacune de ces fonctions, donner l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet de sa courbe.



Correction :

1)

— $\mathcal{C}_3$ est la seule courbe de sommet $(0; -4)$: elle représente f ($c = -4$).

— $\mathcal{C}_1$ est la seule courbe de sommet $(0; 3)$: elle représente g ($c = 3$).

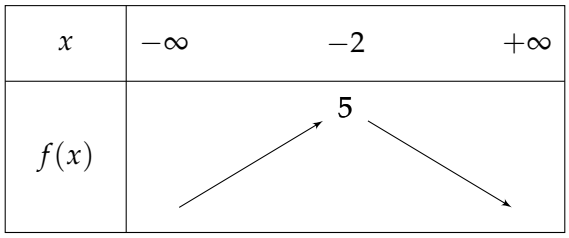
— $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ ont pour sommet l'origine ($c = 0$) : il s'agit de h et k.
$\mathcal{C}_2$ est tournée vers le haut : elle représente h ($a = 3 > 0$).
$\mathcal{C}_4$ est tournée vers le bas : elle représente k ($a = -3 < 0$).

2) Les quatre fonctions sont de la forme $x \mapsto ax^2 + c$: l'axe de symétrie de chaque courbe est donc **l'axe des ordonnées** (droite d'équation $x = 0$).
Sommets : pour f : $(0; -4)$ pour g : $(0; 3)$ pour h : $(0; 0)$ pour k : $(0; 0)$.

Tableau de variations et sommet

Exercice 7

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.



1) Le coefficient a est-il positif ou négatif ? Justifier.

2) Donner les coordonnées du sommet S de la parabole représentant f.

3) Donner l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.

4) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum sur $\mathbb{R}$? Préciser sa valeur et pour quelle valeur de x il est atteint.

5) Comparer, sans calcul, $f(-5)$ et $f(-3)$.

6) On sait que $f(0) = 1$. En utilisant la symétrie de la parabole, donner la valeur de $f(-4)$.

Correction :

1) f est d'abord croissante, puis décroissante : le coefficient a est **négatif**.

2) Le sommet de la parabole est le point $S(-2;5)$.

3) L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = -2$.

4) f admet un **maximum** égal à 5, atteint pour $x = -2$.

5) -5 et -3 appartiennent à l'intervalle $]-\infty;-2]$ sur lequel f est croissante.
Comme $-5 < -3$, on a $f(-5) < f(-3)$.

6) 0 est à une distance de 2 à droite de l'axe $x = -2$; son symétrique est $-2-2 = -4$.
Par symétrie de la parabole, $f(-4) = f(0) = 1$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

1) Donner les valeurs de a, b et c. En déduire le sens de variation de f (d'abord croissante puis décroissante, ou l'inverse).

2) Calculer $f(1)$ et $f(3)$.

3) En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la parabole représentant f.

4) Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole.

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Correction :

1) $a = 2$, $b = -8$ et $c = 3$.
$a = 2 > 0$: f est d'abord décroissante, puis croissante.

2) $f(1) = 2 \times 1^2 - 8 \times 1 + 3 = 2 - 8 + 3 = -3$ et $f(3) = 2 \times 3^2 - 8 \times 3 + 3 = 18 - 24 + 3 = -3$.

3) $f(1) = f(3)$: les points d'abscisses 1 et 3 sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole.
$(1+3) : 2 = 2$, donc l'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = 2$.

4) L'abscisse du sommet est 2 et $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$.
Le sommet a pour coordonnées $S(2; -5)$.

5)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-5	↗