Fonctions polynôme de degré 2

Correction de la fiche d'exercices n°2

Reconnaître une fonction polynôme de degré 2

Exercice 1

Compléter le tableau suivant.

$f(x) = \dots$	Fonction polynôme de degré 2 ?		$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$
	oui	non			
$4x^2 + x - 6$	$\times$		4	1	-6
$-3x^2 + 5$	$\times$		-3	0	5
$2x + 9$		$\times$			
$x^3 - x$		$\times$			
$(x+4)(2x-3)$	$\times$		2	5	-12
$3 + x - 2x^2$	$\times$		-2	1	3
$(x-3)^2 - x^2$		$\times$			

Détails :

- $2x + 9$ est une fonction affine (degré 1) ; $x^3 - x$ contient un terme en x^3 (degré 3).
- $(x+4)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 8x - 12 = \mathbf{2x^2 + 5x - 12}$.
- $3 + x - 2x^2 = \mathbf{-2x^2 + x + 3}$: attention à l'ordre des termes, a est le coefficient de x^2.
- $(x-3)^2 - x^2 = x^2 - 6x + 9 - x^2 = \mathbf{-6x + 9}$: les termes en x^2 s'annulent, c'est une fonction affine.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, dire s'il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2. Si oui, donner les valeurs de a, b et c.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 2$: oui, avec $\mathbf{a = 3}$, $\mathbf{b = -1}$ et $\mathbf{c = 2}$.

b) $g(x) = -5x^2$: oui, avec $\mathbf{a = -5}$, $\mathbf{b = 0}$ et $\mathbf{c = 0}$.

c) $h(x) = 4 - x + 2x^2 = 2x^2 - x + 4$: oui, avec $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = -1}$ et $\mathbf{c = 4}$.

d) $k(x) = 2x(x+3) = 2x^2 + 6x$: oui, avec $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = 6}$ et $\mathbf{c = 0}$.

e) $m(x) = (3x+1)(3x-1) - 9x^2 = 9x^2 - 3x + 3x - 1 - 9x^2 = -1$: **non**, m est une fonction constante.

f) $p(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$: oui, avec $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = 4}$ et $\mathbf{c = 4}$.

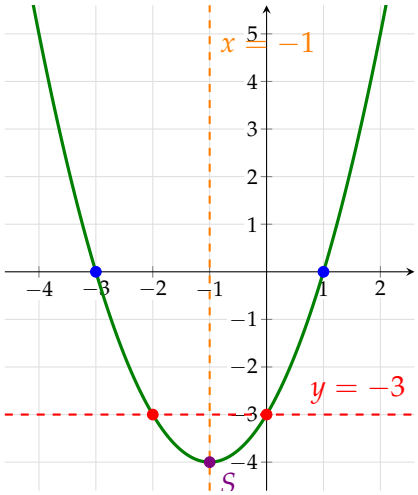
Éléments caractéristiques d'une parabole (lecture graphique)

Exercice 3

On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

En bleu : solutions de $f(x) = 0$; en rouge : solutions de $f(x) = -3$; en orange : axe de symétrie.



1) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses : $S = \{-3\,;\,1\}$.

2) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -3$.

On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = -3$: $S = \{-2\,;\,0\}$.

3) En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la courbe.

-2 et 0 ont la même image, ils sont donc symétriques par rapport à l'axe de symétrie :

$$x = \frac{-2+0}{2} = -1 \qquad \text{soit} \qquad x = -1.$$

(On retrouve le même résultat avec les racines : $\dfrac{-3+1}{2} = -1$.)

4) Calculer l'ordonnée du sommet S de la parabole, puis donner ses coordonnées.

Le sommet est sur l'axe de symétrie, son abscisse est donc -1.
$f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$. Donc $S(-1\,;\,-4)$.

5) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ? Préciser sa valeur.

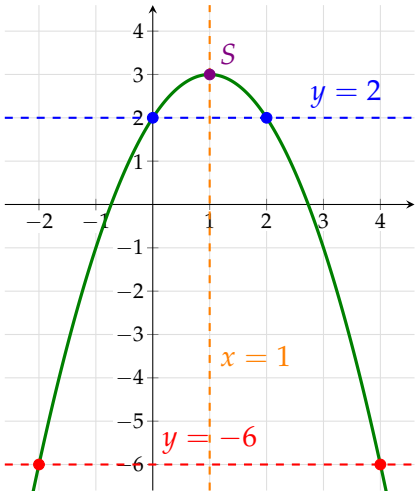
La parabole est tournée vers le haut ($a = 1 > 0$) : f admet un **minimum** égal à -4, atteint pour $x = -1$.

Exercice 4

On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 2.$$

En bleu : solutions de $f(x) = 2$; en rouge : solutions de $f(x) = -6$; en orange : axe de symétrie.



1) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 2$: $S = \{0\,;\,2\}$.

2) Tracer l'axe de symétrie de la courbe et donner son équation.

0 et 2 ont la même image, donc l'axe de symétrie a pour équation $x = \dfrac{0+2}{2} = 1$, soit $x = 1$ (tracé en orange).

3) Donner les coordonnées du sommet S de la parabole. Justifier par un calcul.

Le sommet est sur l'axe de symétrie, son abscisse est donc 1.
$f(1) = -1^2 + 2 \times 1 + 2 = -1 + 2 + 2 = 3$. Donc $S(1\,;\,3)$.

4) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -6$.

On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = -6$: $S = \{-2\,;\,4\}$.
(Vérification : -2 et 4 sont bien symétriques par rapport à $x = 1$ car $\dfrac{-2+4}{2} = 1$.)

5) Le coefficient a est-il positif ou négatif ? Était-ce prévisible sur le graphique ?

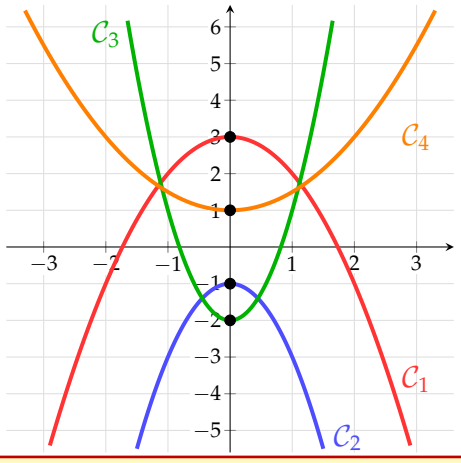
$a = -1$, donc $a < 0$. C'était prévisible : la parabole est « tournée vers le bas » (la fonction est d'abord croissante puis décroissante).

Associer une fonction $x \mapsto ax^2 + c$ à sa courbe

Exercice 5

Associer chaque fonction à sa représentation graphique. Justifier.

$$f(x) = 3x^2 - 2$$
$$g(x) = -x^2 + 3$$
$$h(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$
$$k(x) = -2x^2 - 1$$

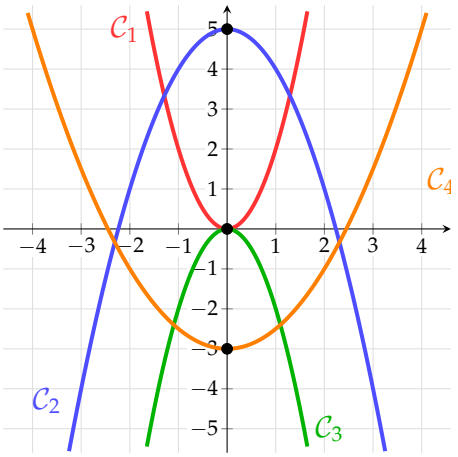


Pour une fonction $x \mapsto ax^2 + c$: si $a > 0$ la parabole est tournée vers le haut, si $a < 0$ elle est tournée vers le bas, et son sommet a pour coordonnées $(0\,;\,c)$.

- $f(x) = 3x^2 - 2 : a = 3 > 0$ (vers le haut), sommet $(0\,;\,-2) \Rightarrow f$ est représentée par $\mathcal{C}_3$.
- $g(x) = -x^2 + 3 : a = -1 < 0$ (vers le bas), sommet $(0\,;\,3) \Rightarrow g$ est représentée par $\mathcal{C}_1$.
- $h(x) = \frac{x^2}{2} + 1 : a = \frac{1}{2} > 0$ (vers le haut), sommet $(0\,;\,1) \Rightarrow h$ est représentée par $\mathcal{C}_4$.
- $k(x) = -2x^2 - 1 : a = -2 < 0$ (vers le bas), sommet $(0\,;\,-1) \Rightarrow k$ est représentée par $\mathcal{C}_2$.

Exercice 6

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3$$
$$g(x) = -x^2 + 5$$
$$h(x) = 2x^2$$
$$k(x) = -2x^2$$



1) Associer chaque fonction à sa représentation graphique. Justifier.

- $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3 : a = \frac{1}{2} > 0$ (vers le haut), sommet $(0\,;\,-3) \Rightarrow f$ est représentée par $\mathcal{C}_4$.
- $g(x) = -x^2 + 5 : a = -1 < 0$ (vers le bas), sommet $(0\,;\,5) \Rightarrow g$ est représentée par $\mathcal{C}_2$.
- $h(x) = 2x^2 : a = 2 > 0$ (vers le haut), sommet $(0\,;\,0) \Rightarrow h$ est représentée par $\mathcal{C}_1$.
- $k(x) = -2x^2 : a = -2 < 0$ (vers le bas), sommet $(0\,;\,0) \Rightarrow k$ est représentée par $\mathcal{C}_3$.

Remarque : h et k ont le même sommet, c'est le signe de a qui permet de les distinguer.

2) Pour chacune de ces fonctions, donner l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet de sa courbe.

Pour une fonction $x \mapsto ax^2 + c$, l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, pour les quatre courbes.

Fonction	f	g	h	k
Axe de symétrie	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Sommet	$(0\,;\,-3)$	$(0\,;\,5)$	$(0\,;\,0)$	$(0\,;\,0)$

Tableau de variations et sommet

Exercice 7

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

1) Le coefficient a est-il positif ou négatif ? Justifier.

f est d'abord décroissante puis croissante, donc $a > 0$.

2) Donner les coordonnées du sommet S de la parabole représentant f.

Le sommet correspond au changement de variation : $S(3\,;\,-4)$.

3) Donner l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.

L'axe de symétrie passe par le sommet : $x = 3$.

4) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum sur $\mathbb{R}$? Préciser sa valeur et pour quelle valeur de x il est atteint.

f admet un **minimum** égal à -4, atteint pour $x = 3$.

5) Comparer, sans calcul, $f(5)$ et $f(7)$.

5 et 7 appartiennent à l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$ sur lequel f est croissante. Comme $5 < 7$, on a $f(5) < f(7)$.

6) On sait que $f(0) = 5$. En utilisant la symétrie de la parabole, donner la valeur de $f(6)$.

$\dfrac{0+6}{2} = 3$: les nombres 0 et 6 sont symétriques par rapport à l'axe d'équation $x = 3$.
Ils ont donc la même image : $f(6) = f(0) = 5$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$.

1) Donner les valeurs de a, b et c. En déduire le sens de variation de f (d'abord croissante puis décroissante, ou l'inverse).

$a = -3$, $b = 12$ et $c = -7$.
Comme $a = -3 < 0$, la fonction f est **d'abord croissante puis décroissante**.

2) Calculer $f(1)$ et $f(3)$.

$f(1) = -3 \times 1^2 + 12 \times 1 - 7 = -3 + 12 - 7 = 2$
$f(3) = -3 \times 3^2 + 12 \times 3 - 7 = -27 + 36 - 7 = 2$
(Attention : $-3 \times 3^2 = -3 \times 9 = -27$; le carré ne porte que sur 3.)

3) En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la parabole représentant f.

1 et 3 ont la même image, ils sont donc symétriques par rapport à l'axe de symétrie :

$$x = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad \text{soit} \qquad x = 2.$$

4) Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole.

Le sommet appartient à l'axe de symétrie, donc son abscisse est 2.
$f(2) = -3 \times 2^2 + 12 \times 2 - 7 = -12 + 24 - 7 = 5$. Donc $S(2\,;\,5)$.

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	