Correction - DS n°03
Probabilités conditionnelles

Exercice 1 — (2 points)

Alice fabrique chaque semaine 250 bijoux fantaisie qu'elle vend en fin de semaine afin de s'assurer quelques revenus.
Sa production hebdomadaire de bijoux se répartit comme suit : 20 % de boucles d'oreilles, 40 % de colliers et 40 % de bracelets.
Chaque bijou est réalisé, soit en métal argenté, soit en métal doré.

- 60 % des bijoux fabriqués sont argentés.
- Elle fabrique autant de colliers argentés que de colliers dorés.
- 75 % des bracelets sont argentés.

Compléter le tableau suivant : (2)

	Collier	Bracelet	Boucles d'oreilles	Total
Argenté	50	75	25	150
Doré	50	25	25	100
Total	100	100	50	250

— Boucles d'oreilles : $0,2 \times 250 = 50$; colliers : $0,4 \times 250 = 100$; bracelets : $0,4 \times 250 = 100$.
— Bijoux argentés : $0,6 \times 250 = 150$, donc bijoux dorés : $250 - 150 = 100$.
— Colliers argentés = colliers dorés $= \dfrac{100}{2} = 50$.
— Bracelets argentés : $0,75 \times 100 = 75$, donc bracelets dorés : $100 - 75 = 25$.
— Boucles d'oreilles argentées : $150 - 50 - 75 = 25$, donc dorées : $50 - 25 = 25$.

Barème : 0,5 pour la ligne Total ; 0,5 pour la colonne Total ; 0,5 pour la colonne Collier ; 0,5 pour les colonnes Bracelet et Boucles d'oreilles.

Exercice 2 — (3 points)

Pour combattre les risques d'épidémie dus à une maladie, un laboratoire a mis au point un vaccin.
Pour évaluer l'efficacité de ce vaccin, une étude statistique a été faite auprès de 2 000 personnes. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Vacciné	Non vacciné	Total
Malade	45	750	795
Non malade	455	750	1 205
Total	500	1 500	2 000

On choisit au hasard une de ces 2 000 personnes.
On note M l'événement « *la personne est malade* » et V l'événement « *la personne est vaccinée* ».

1) Déterminer la probabilité $P_V(M)$. (1)

$$P_V(M) = \frac{\text{Card}(V \cap M)}{\text{Card}(V)} = \frac{45}{500} = \frac{9}{100} = 0,09$$

Barème : 0,5 pour la fraction $\frac{45}{500}$; 0,5 pour le résultat simplifié.

2) ✎ Déterminer la probabilité que la personne soit vaccinée sachant qu'elle a été malade. ①

On cherche $P_M(V) = \dfrac{\text{Card}(M \cap V)}{\text{Card}(M)} = \dfrac{45}{795} = \dfrac{3}{53} \approx 0,057$

Barème : 0,5 pour l'identification de $P_M(V)$; 0,5 pour le résultat.

3) Déterminer la probabilité que la personne soit vaccinée et malade. ①

$P(V \cap M) = \dfrac{45}{2\,000} = \dfrac{9}{400} = 0,0225$

Barème : 0,5 pour l'identification de $P(V \cap M)$; 0,5 pour le résultat.

Exercice 3 — (1 point)

Si A et B sont des événements tels que $\text{P}(\text{A}) = 0,6$ et $\text{P}(\text{A} \cap \text{B}) = 0,2$, à quoi est égale $\text{P}_\text{A}(\text{B})$? ①

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$

Barème : 0,5 pour la formule ; 0,5 pour le résultat.

Exercice 4 — (3 points)

Deux événements A et B vérifient $\text{P}(\text{A}) = 0,35, \text{P}(\text{B}) = 0,7$ et $\text{P}(\text{A} \cup \text{B}) = 0,8$.

1) Calculer $P(A \cap B)$. ①

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,35 + 0,7 - 0,8 = 0,25$

Barème : 0,5 pour la formule ; 0,5 pour le résultat.

2) En déduire $\text{P}_\text{B}(\text{A})$ et $\text{P}_\text{A}(\text{B})$. ②

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,25}{0,7} = \dfrac{5}{14} \approx 0,357$

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,25}{0,35} = \dfrac{5}{7} \approx 0,714$

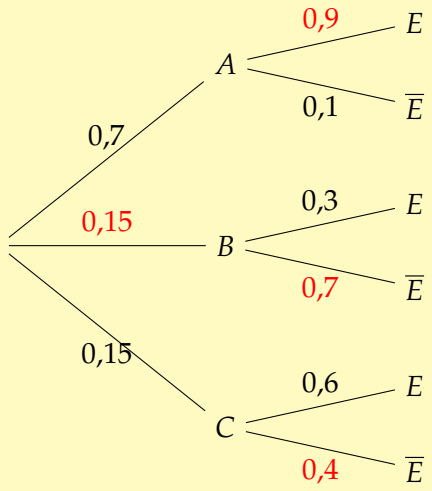
Barème : 1 point par probabilité (0,5 formule, 0,5 résultat).

Exercice 5 — (6 points)

On considère trois événements A, B et C qui forment une partition de l'univers Ω ainsi qu'un événement E.
On donne l'arbre de probabilité suivant :

1) Compléter cet arbre de probabilité. ②

A, B et C forment une partition de Ω donc $P(B) = 1 - 0,7 - 0,15 = 0,15$.
La somme des probabilités des branches issues d'un même nud vaut 1 : $P_A(E) = 1 - 0,1 = 0,9$; $P_B(\overline{E}) = 1 - 0,3 = 0,7$; $P_C(\overline{E}) = 1 - 0,6 = 0,4$.



Barème : 0,5 pour $P(B)$; 0,5 pour chacune des trois probabilités conditionnelles.

2) **a)** Calculer $P(A \cap E)$ (1) $P(A \cap E) = P(A) \times P_A(E) = 0,7 \times 0,9 = 0,63$

b) Calculer $P(B \cap E)$ (1) $P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = 0,15 \times 0,3 = 0,045$

c) Calculer $P(C \cap E)$ (1) $P(C \cap E) = P(C) \times P_C(E) = 0,15 \times 0,6 = 0,09$

d) En déduire $P(E)$. (1)

D'après la formule des probabilités totales :
$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) = 0,63 + 0,045 + 0,09 = 0,765$

Barème : 0,5 pour la décomposition ; 0,5 pour le résultat.

Barème a), b), c) : 0,5 pour le produit le long des branches ; 0,5 pour le résultat.

Exercice 6 — (5 points)

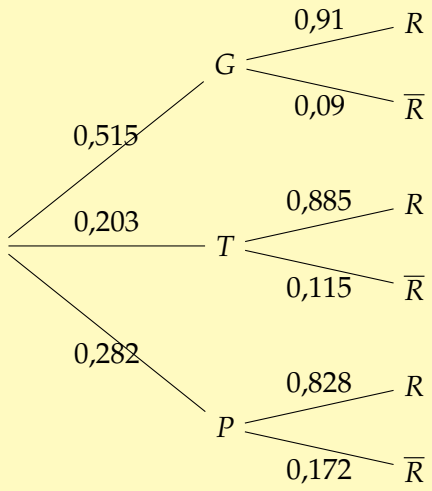
En 2018, la répartition des candidats au baccalauréat est la suivante :

- 51,5% pour la filière générale ;
- 20,3% pour la filière technologique ;
- 28,2% pour la filière professionnelle.

Les taux de réussite en pourcentage sont respectivement les suivants : 91,0 % ; 88,5 % et 82,8 %. On choisit un candidat au hasard.

1) Construire un arbre pondéré modélisant l'expérience aléatoire. (2,5)

On note G, T et P les événements « *le candidat est en filière générale / technologique / professionnelle* » et R l'événement « *le candidat réussit le baccalauréat* ».



Barème : 0,5 pour la structure de l'arbre ; 0,5 pour les trois probabilités du premier niveau ; 1,5 pour les six probabilités du second niveau (0,25 chacune).

2) ✎ Déterminer la probabilité de réussir le baccalauréat. **2,5**

G, T et P forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(R) = P(G \cap R) + P(T \cap R) + P(P \cap R)$
$P(R) = 0,515 \times 0,91 + 0,203 \times 0,885 + 0,282 \times 0,828$
$P(R) = 0,46865 + 0,179655 + 0,233496 = 0,881801 \approx 0,882$
La probabilité qu'un candidat réussisse le baccalauréat est d'environ $0,882$ (soit $88,2\,\%$).

Barème : 1 pour la décomposition en somme des trois intersections ; 1 pour les produits ; 0,5 pour le résultat.