

Chapitre 1

Automatismes de calcul - Proportions, pourcentages et évolutions

I. proportion et pourcentage

1) Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes

Méthode

Énoncé :

On réalise un sondage auprès de 400 personnes concernant les mesures prises par le gouvernement.

- 1) 94 de ces 400 personnes ont affirmés être pleinement satisfaite des mesures prises par le gouvernement.

Déterminer la proportion de personnes pleinement satisfaite des mesures prises par le gouvernement, puis l'exprimer sous forme de pourcentage.

- 2) La proportion des personnes non satisfaites est $\frac{3}{8}$.

Combien de personnes ont affirmés ne pas être satisfaites des mesures prises par le gouvernement ?

Réponse :

- 1) Le nombre de personnes interrogés est $n_E = 400$. Parmi ceux-ci, le nombre de ceux satisfait est $n_S = 94$.

La proportion de personnes pleinement satisfaite des mesures prises par le gouvernement est

$$p = \frac{n_S}{n_E} = \frac{94}{400} = 0,235 = 23,5\%.$$

- 2) Soit n_N le nombre de personnes non satisfaites.

$$\text{On a } \frac{n_N}{n_E} = \frac{3}{8}, \text{ soit } \frac{n_N}{400} = \frac{3}{8}. \text{ On a donc } n_N = \frac{400 \times 3}{8} = 150.$$

Il y a donc 150 personnes non satisfaites des mesures prises par le gouvernement.

2) Calculer la proportion d'une proportion

Méthode

Énoncé :

Un maraîcher vend des légumes en direct à la ferme et sur des marchés mais aussi dans des supermarchés locaux. Au cours du mois de Juin, il a vendu 78% de sa production en direct, et parmi ces légumes, 65% ont été vendu à la ferme.

Quelle proportion de sa production a été vendu directement à la ferme ?

Réponse :

La proportion p_1 de légumes vendus en direct est $p_1 = 0,78$

La proportion p_2 de légumes vendus à la ferme parmi ceux vendus en direct est $p_2 = 0,65$

On calcule : $p = p_1 \times p_2 = 0,78 \times 0,65 = 0,507 = 50,7\%$

La proportion de sa production vendue directement à la ferme a été de 50,7%

3) Passer du pourcentage d'évolution au coefficient multiplicateur

Méthode

Énoncé :

Le nombre de naissances dans un département français entre 2010 et 2019 a diminué de 12%

- 1) Par quel coefficient a été multiplié le nombre de naissances entre 2010 et 2019.
- 2) Le nombre d'habitants de ce département a, quant à lui, été multiplié par 1,03.
A quel taux d'évolution du nombre d'habitants de ce département ce coefficient multiplicateur correspond-il ?

Réponse :

- 1) Le taux d'évolution du nombre de naissances est $t = -0,12$.
Diminuer une quantité de 12% signifie la multiplier par $c = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$.
Par conséquent, le nombre de naissances dans ce département a été multiplié par 0,88.
- 2) Le nombre d'habitants de ce département a, quant à lui, été multiplié par $c = 1,03$.
Le taux d'évolution associé à ce coefficient multiplicateur est : $t = c - 1 = 0,03$.
Ainsi le nombre d'habitants du département a augmenté de 3%

II. Evolutions et variations

1) Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale

Méthode

Énoncé :

En 2016, 88200 personnes ont visité un parc d'attractions

- 1) Ce nombre de visiteurs a augmenté de 12,5% en 2017.
Quel a été le nombre de visiteurs en 2017.
- 2) Il y a eu 112500 visiteurs en 2018, puis une baisse de la fréquentation de 8% en 2019. Quel a été le nombre de visiteurs en 2019 ?

Réponse :

- 1) Augmenter une quantité de 12,5% signifie la multiplier par $c = 1 + \frac{12,5}{100} = 1,125$.
Or $88200 \times 1,125 = 99225$. Le nombre de visiteurs a été de 99225 personnes en 2017.
- 2) Diminuer une quantité de 8% signifie la multiplier par $c = 1 - \frac{8}{100} = 0,92$.
Or $112500 \times 0,92 = 103500$. Le nombre de visiteurs a été de 103500 personnes en 2019.

2) Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur initiale

Méthode

Énoncé :

Le prix du ticket de métro d'une grande ville augmente de 4% au 1^{er} janvier 2020.

Le ticket de métro au tarif réduit coûte 1,56 € après son augmentation.

Combien coûtait-il avant l'augmentation ?

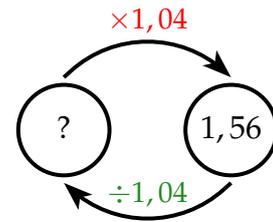
Réponse :

Augmenter une quantité de 4% revient à la multiplier par 1,04.

Diviser par 1,04 permet de compenser une multiplication par 1,04.

Le ticket de métro au tarif réduit coûte 1,56 €. Donc son prix avant augmentation est donné par le quotient $\frac{1,56}{1,04}$.

Or $\frac{1,56}{1,04} = 1,5$. Ainsi le ticket de métro valait 1,50 € avant le 1^{er} janvier 2020.



3) Calculer un taux d'évolution et l'exprimer en pourcentage

Méthode

Énoncé :

Le prix d'un kilogramme d'abricots passe de 2,50 € à 1,80 € en début de saison.

1) Déterminer le pourcentage d'évolution du prix du kilogramme d'abricots en début de saison.

2) En fin de saison, le prix d'un kilogramme passe de 1,80 € à 2,61 €.

Déterminer le pourcentage d'augmentation du prix d'un kilogramme d'abricots en fin de saison

Réponse :

1) On a $Q_1 = 2,50$ et $Q_2 = 1,80$. Le taux d'évolution t de la valeur Q_1 à la valeur Q_2 est :

$$t = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{1,80 - 2,50}{2,50} = \frac{-0,70}{2,50} = -0,28 = -28\%.$$

Le prix du kilogramme d'abricots a diminué de 28% en début de saison.

2) On a $Q_1 = 1,80$ et $Q_2 = 2,61$. Le taux d'évolution t correspondant est :

$$t = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{2,61 - 1,80}{1,80} = \frac{0,60}{1,80} = 0,45 = 45\%.$$

Le prix du kilogramme d'abricots a augmenté de 45% en fin de saison.

4) Interpréter un indice

Méthode

Énoncé : On définit l'indice base 100 du prix moyen en euros de la baguette de 250 grammes en 2000.

Le prix moyen de la baguette en 2000 était de 0,64 €.

On arrondira les résultats au centime d'euro

1) L'indice du prix de la baguette en 2019 était 145. Calculer le prix moyen de la baguette en 2019.

2) L'indice du prix de la baguette était de 12 en 1960. Quel était le prix de la baguette en 1960 ?

Réponse :

1) Soit P_1 le prix moyen de la baguette en 2019 (et P_0 celui de la baguette en 2000), année où l'indice a pour valeur $I_1 = 145$ ($I_0 = 100$ en 2000).

On utilise la proportionnalité des indices et des prix : $\frac{P_1}{P_0} = \frac{I_1}{I_0}$.

D'où $P_1 = P_0 \times I_1 \div I_0 = 0,64 \times 145 \div 100 \approx 0,93$.

Le prix moyen en 2019 était donc environ 0,93 €.

2) Soit P_2 le prix moyen de la baguette en 1960 (et P_0 celui de la baguette en 2000), année où l'indice a pour valeur $I_2 = 12$ ($I_0 = 100$ en 2000).

On utilise la proportionnalité des indices et des prix : $\frac{P_2}{P_0} = \frac{I_2}{I_0}$.

D'où $P_2 = P_0 \times I_2 \div I_0 = 0,64 \times 12 \div 100 \approx 0,08$.

Le prix moyen en 1960 était donc environ 0,08 €.

5) Calculer un indice

Méthode

Enoncé : On donne dans le tableau ci-dessous la production mondiale de coton, en million de tonnes, selon les années.

Année	2005	2010	2018
Production	27	21,8	25,4

On définit l'indice base 100 de la production mondiale de coton en 2005.

Calculer à 0,1 près, l'indice de la production mondiale de coton en 2010 et en 2018.

Réponse :

Soit I_1 l'indice de production de la production mondiale de coton en 2010.

On traduit la proportionnalité des indices et des productions : $\frac{I_1}{100} = \frac{21,8}{27}$, soit $I_1 = \frac{21,8}{27} \times 100$, soit $I_1 \approx 80,7$

Soit I_2 l'indice de production de la production mondiale de coton en 2018.

On traduit la proportionnalité des indices et des productions : $\frac{I_2}{100} = \frac{25,4}{27}$, soit $I_2 = \frac{25,4}{27} \times 100$, soit $I_2 \approx 94,1$

6) Calculer le taux d'évolution de plusieurs évolutions successives

Méthode

Enoncé :

Le cours d'une action au 1^{er} février 2020 a augmenté de 12% par rapport à son cours au 1^{er} janvier 2020. Il augmente ensuite de 8% entre le 1^{er} février 2020 et le 1^{er} mars 2020.

1) Déterminer le taux d'évolution global du cours de cette action entre le 1^{er} janvier et le 1^{er} mars 2020.

2) Le cours de cette action diminue ensuite entre le 1^{er} mars et le 1^{er} avril 2020 de 25%, puis augmente de 14% entre le 1^{er} avril et le 1^{er} mai. Déterminer le pourcentage d'évolution du

cours de l'action entre le 1^{er} février et le 1^{er} mai 2020.

Réponse :

- 1) Augmenter une quantité de 12% revient à la multiplier par $1 + \frac{12}{100}$, soit 1,12.

Le coefficient multiplicateur global pour ces deux évolutions successives est donc $c = 1,12 \times 1,08 = 1,2096$. Le taux d'évolution global du cours de l'action est donc $1,2096 - 1$, soit 0,2096. Ainsi le pourcentage d'augmentation de ce cours est 20,96%.

- 2) Entre le 1^{er} février et le 1^{er} mai, il y a trois évolutions successives de coefficients multiplicateurs 1,08, $1 - 0,25 = 0,75$ et $1 + 0,14 = 1,14$. Le coefficient multiplicateur global pour ces trois évolutions successives est donc $c' = 1,08 \times 0,75 \times 1,14 = 0,9234$.

$c' - 1 = -0,0766$, donc le cours de cette action a diminué de 7,66% entre le 1^{er} février et le 1^{er} mai 2020.

7) Calculer un taux d'évolution réciproque

Méthode

Énoncé :

La population de bouquetins dans un parc national a diminué en 2019 de 18%.

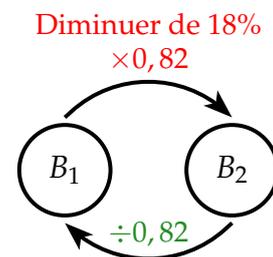
Déterminer, à 0,1% près, le pourcentage d'augmentation nécessaire de cette population en 2020 afin que la population de bouquetins retrouve son niveau initial.

Réponse :

Diminuer une quantité de 18% revient à la multiplier par $c = 1 - 0,18 = 0,82$. Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est c' tel que $c \times c' = 1$, soit $c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,82}$ et $c' \approx 1,22$

Soit t' le taux d'augmentation cherché. Alors $t' = c' - 1$; donc $t' \approx 0,22$.

On en déduit que le pourcentage d'augmentation de cette population doit être de 22%, à 0,1% près, pour revenir au niveau initial de 2018.



8) Reconnaître une situation de suite géométrique

Méthode

Énoncé :

Le cours d'une action au 1^{er} février 2020 a augmenté de 12% par rapport à son cours au 1^{er} janvier 2020. Il augmente ensuite de 8% entre le 1^{er} février 2020 et le 1^{er} mars 2020.

- Déterminer le taux d'évolution global du cours de cette action entre le 1^{er} janvier et le 1^{er} mars 2020.
- Le cours de cette action diminue ensuite entre le 1^{er} mars et le 1^{er} avril 2020 de 25%, puis augmente de 14% entre le 1^{er} avril et le 1^{er} mai. Déterminer le pourcentage d'évolution du cours de l'action entre le 1^{er} février et le 1^{er} mai 2020.

Réponse :

- 1) Augmenter une quantité de 12% revient à la multiplier par $1 + \frac{12}{100}$, soit 1,12.

Le coefficient multiplicateur global pour ces deux évolutions successives est donc $c = 1,12 \times 1,08 = 1,2096$. Le taux d'évolution global du cours de l'action est donc $1,2096 - 1$, soit $0,2096$. Ainsi le pourcentage d'augmentation de ce cours est $20,96\%$.

- 2) Entre le 1^{er} février et le 1^{er} mai, il y a trois évolutions successives de coefficients multiplicateurs $1,08$, $1 - 0,25 = 0,75$ et $1 + 0,14 = 1,14$. Le coefficient multiplicateur global pour ces trois évolutions successives est donc $c' = 1,08 \times 0,75 \times 1,14 = 0,9234$.

$c' - 1 = -0,0766$, donc le cours de cette action a diminué de $7,66\%$ entre le 1^{er} février et le 1^{er} mai 2020.