Chapitre 2

Suites arithmétiques

I. définition et expression du terme général d'une suite arithmétique

1) définition

Exemple : On considère la liste des trois nombres suivants : -2, 5 et 12.
Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite arithmétique ?
Pour y répondre, il faut s'assurer que la différence entre deux termes consécutifs reste la même.
$12-5=7$
$5-(-2)=7$
Cette différence reste égale à 7.
-2, 5 et 12 sont bien les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 7 et de premier terme -2. La suite est donc définie par : $U_{n+1}=U_n+7$ et $U_0=-2$.

Définition

Une suite U_n est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1}=U_n+r$. Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode - Démontrer si une suite est arithmétique

Enoncé :
1) La suite U_n définie par : $U_n=7-9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite V_n définie par : $V_n=n^2+3$ est-elle arithmétique ?

Réponse :
1) $U_{n+1}-U_n=7-9(n+1)-7+9n=7-9n-9-7+9n=-9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9.
U_n est une suite arithmétique de raison -9.

2) $V_{n+1}-V_n=(n+1)^2+3-n^2-3=n^2+2n+1+3-n^2-3=2n+1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
V_n n'est pas une suite arithmétique.

2) Forme explicite d'une suite arithmétique

Méthode - Exprimer une suite arithmétique en fonction de n

Enoncé :
Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive. Il commence son entraînement au « *jour 0* » par un petit footing d'une longueur de 3000 m. Au « *jour 1* », il court 3150 m. Au « *jour 2* », il court 3300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille. On note U_n la distance parcourue au « *jour n* » d'entraînement.

1) Calculer U_3 et U_4.

2) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.

3) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

4) Donner la variation de la suite (U_n).

5) Exprimer U_n en fonction de n.

Réponse :

1) $U_0 = 3000$ $U_1 = 3150$ $U_2 = 3300$ $U_3 = 3450$ $U_4 = 3600$

2) (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3000$ et de raison $r = 150$.
On parle ici de **croissance linéaire**.

3) $U_{n+1} = U_n + 150$

4) $r = 150 > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

5) Après 1 jour, il parcourt : $U_1 = 3000 + 150 \times 1$
Après 2 jours, il parcourt : $U_2 = 3000 + 150 \times 2$
Après 3 jours, il parcourt : $U_3 = 3000 + 150 \times 3$
De manière générale, après n jours, il parcourt : $U_n = 3000 + 150n$

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_0 + nr$.
On peut également écrire : $U_n = U_1 + (n-1)r$

3) Rappel : Variation

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r.

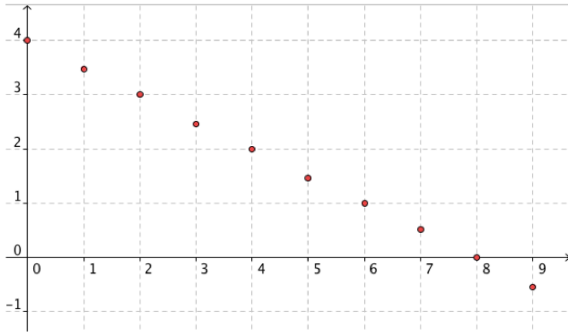
- Si $r > 0$ alors la suite U_n est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite U_n est décroissante.

Exemple : La suite arithmétique U_n définie par $U_n = 8 - 3n$ est décroissante car de raison négative et égale à -3.

4) Rappel : Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple : On a représenté ci-dessous la suite de raison $0,5$ et de premier terme 4.



II. Somme des termes d'une suite arithmétique

Méthode - Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Enoncé :

On reprend le contexte de la méthode du paragraphe I.

1) Quelle distance aura-t-il parcourue au total lorsqu'il sera au « *jour 15* » de son entraînement ?
2) Quelle distance aura-t-il parcourue au total entre le « *jour 8* » et le« *jour 12* » ?

Réponse :

Propriété

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

1) La distance parcourue au total au « *jour 15* » d'entraînement est :
$S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{14}$.
D'après la propriété, on a :
$$\text{Somme} = 15 \times \frac{U_0 + U_{14}}{2} = 15 \times \frac{3000 + 3000 + 150 \times 14}{2} = 15 \times \frac{8100}{2} = 60\,750$$

Remarque Pour noter une telle somme, on peut utiliser le symbole $\sum$:
$$U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{14} = \sum_{k=0}^{14} U_k = 60\,750$$

2) La distance parcourue au total entre le « *jour 8* » et le « *jour 12* » d'entraînement est :
$$U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11} = \sum_{k=7}^{11} U_k$$
$$\sum_{k=7}^{11} U_k = 5 \times \frac{U_7 + U_{11}}{2} = 5 \times \frac{3000 + 150 \times 7 + 3000 + 150 \times 11}{2} = 5 \times \frac{8700}{2} = 21\,750$$

Calculatrice

Pour vérifier, on peut utiliser la calculatrice :

- Pour accéder au catalogue : .
- Sélectionner le menu analyse
- Choisir $\boxed{\sum\limits_{k=m}^{n}(f(k))}$
- Et compléter pour afficher : $\boxed{\sum\limits_{X=0}^{14}(3000+150X)}$

III. Moyenne arithmétique de deux nombres

Méthode - Calculer une moyenne arithmétique de deux nombres

Enoncé :

1) Calculer la moyenne arithmétique des nombres -3 et 19.

2) Peut-on affirmer que chaque terme d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit ?

Définition

En mathématiques, la **moyenne arithmétique** d'une liste de nombres est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs.

Réponse :

1) La moyenne arithmétique d'une suite de valeurs est donc la moyenne que l'on connaît depuis le collège.
Soit ici :

$$m=\frac{-3+19}{2}=\frac{16}{2}=8$$

2) Si on note U_n le terme dune suite arithmétique, on a : $\boldsymbol{U_{n+1}=U_n+r}$, où r est la raison de la suite.
Et on a également : $U_n=U_{n-1}+r$ donc $\boldsymbol{U_{n-1}=U_n-r}$

La moyenne arithmétique du terme qui précède U_n et du terme qui le suit est égale à :

$$\begin{aligned} m &= \frac{U_{n-1}+U_{n+1}}{2} \\ &= \frac{U_n-r+U_n+r}{2} \\ &= \frac{2U_n}{2} \\ &= U_n \end{aligned}$$

Donc U_n est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Résumé

	(U_n) suite arithmétique : - de raison r - premier terme U_0	Exemple : $r = -0,5$ et $U_0 = 4$
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = U_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0,5$
Propriété	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_1 + (n-1)r$	$U_n = 4 - 0,5n$
Variations	Si $r > 0$: (U_n) est croissante Si $r > 0$: (U_n) est décroissante	$r = -0,5 < 0$ La suite (U_n) est décroissante.
Somme des termes consécutifs	Somme $=$ nombre de termes $\times \left(\dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$	$U_3 + ... + U_{10} = 8 \times \dfrac{U_3 + U_{10}}{2}$
Représenta-tion graphique	**Remarque** : Les points de la représentation graphique sont alignés. On parle de croissance linéaire.