Correction - Exercices d'entrainement
Équations du 2nd degré

Exercice 1 - Racine évidente Factoriser les fonctions polynômes du second degré sans calculer leur discriminant.

1) $f : x \mapsto -6x^2 + 10x - 4$

$f(1) = -6 \times 1^2 + 10 \times 1 - 4 = -6 + 10 - 4 = 0$. 1 est une racine évidente.
$P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \iff x_2 = \dfrac{2}{3}$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -6(x-1)(x - \dfrac{2}{3})$

2) $g : x \mapsto 6x^2 + 2x - 20$

$f(-2) = 6 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 20 = 24 - 4 - 20 = 0$. -2 est une racine évidente.
$P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-20}{6} = -\dfrac{10}{3} \iff x_2 = -\dfrac{5}{3}$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 6(x+2)(x + \dfrac{5}{3})$

3) $h : x \mapsto 4x^2 - 14x + 12$

$f(2) = 4 \times (2)^2 - 14 \times 2 + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$. 2 est une racine évidente.
$P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{4} = 3 \iff x_2 = \dfrac{3}{2}$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 4(x-2)(x - \dfrac{3}{2})$

4) $k : x \mapsto 2x^2 - 8x + 8$

$f(2) = 2 \times (2)^2 - 8 \times 2 + 8 = 8 - 16 + 8 = 0$. 2 est une racine évidente.
$P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{8}{2} = 4 \iff x_2 = 2 = x_1$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x-2)(x-2) = 2(x-2)^2$

Exercice 2 - Equations Resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $-2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = -7$
$\Delta < 0$ donc $S = \varnothing$

2) $2x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$
$\Delta > 0$ donc 2 solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2 \times 2} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{2 \times 2} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$
$S = \left\{\dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\right\}$

3) $5x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 1 = -16$
$\Delta < 0$ donc $S = \varnothing$

4) $2x^2 + 4 = -6x$

$2x^2+6x+4=0$
$\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times2\times4=4$
$\Delta>0$ donc 2 solutions :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{4}}{2\times2}=-2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{4}}{2\times2}=-1$
$S=\{-2;-1\}$

5) $x(2x-1)=1$

$2x^2-x-1=0$
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=9$
$\Delta>0$ donc 2 solutions :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2\times2}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{9}}{2\times2}=1$
$S=\left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$

6) $x^2=-5x-1$

$x^2+5x+1=0$
$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times1=21$
$\Delta>0$ donc 2 solutions :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$
$S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$

7) $-x+3x^2-1=0$

$3x^2-x-1=0$
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times(-1)=13$
$\Delta>0$ donc 2 solutions :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$
$S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{13}}{6};\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right\}$

8) $x(8-x)+1=0$

$-x^2+8x+1=0$
$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-1)\times1=68$
$\Delta>0$ donc 2 solutions :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-8-\sqrt{68}}{2\times(-1)}=4+\sqrt{17}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-8+\sqrt{68}}{2\times(-1)}=4-\sqrt{17}$
$S=\left\{4-\sqrt{17};4+\sqrt{17}\right\}$

9) $2x^2+6x+\dfrac{9}{2}=0$

$\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times2\times\dfrac{9}{2}=0$
$\Delta=0$ donc 1 solution :
$x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$
$S=\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

10) $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$
$\Delta = 0$ donc 1 solution :
$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$
$S = \left\{-\sqrt{3}\right\}$

11) $-3x^2 + x = -\dfrac{1}{4}$

$-3x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-3) \times \dfrac{1}{4} = 4$
$\Delta > 0$ donc 2 solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{4}}{2 \times (-3)} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + \sqrt{4}}{2 \times (-3)} = -\dfrac{1}{6}$
$S = \left\{-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{2}\right\}$

12) $2x(5 + 2x) = 9 - 2x$

$10x + 4x^2 - 9 + 2x = 0 \iff 4x^2 + 12x - 9 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 4 \times (-9) = 288$
$\Delta > 0$ donc 2 solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 - \sqrt{288}}{2 \times 4} = \dfrac{-3 - 3\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 + \sqrt{288}}{2 \times 4} = \dfrac{-3 + 3\sqrt{2}}{2}$
$S = \left\{\dfrac{-3 - 3\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-3 + 3\sqrt{2}}{2}\right\}$

Exercice 3 - Inéquations et représentations graphiques

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^2 - 5x + 3$ et $g(x) = 3x + 1$, de représentations graphiques C_f et C_g

1) Préciser la nature de C_f et de C_g

$f(x)$ est une fonction du second degré. C_f est donc une parabole.
$g(x)$ est une fonction affine. C_g est donc une droite.

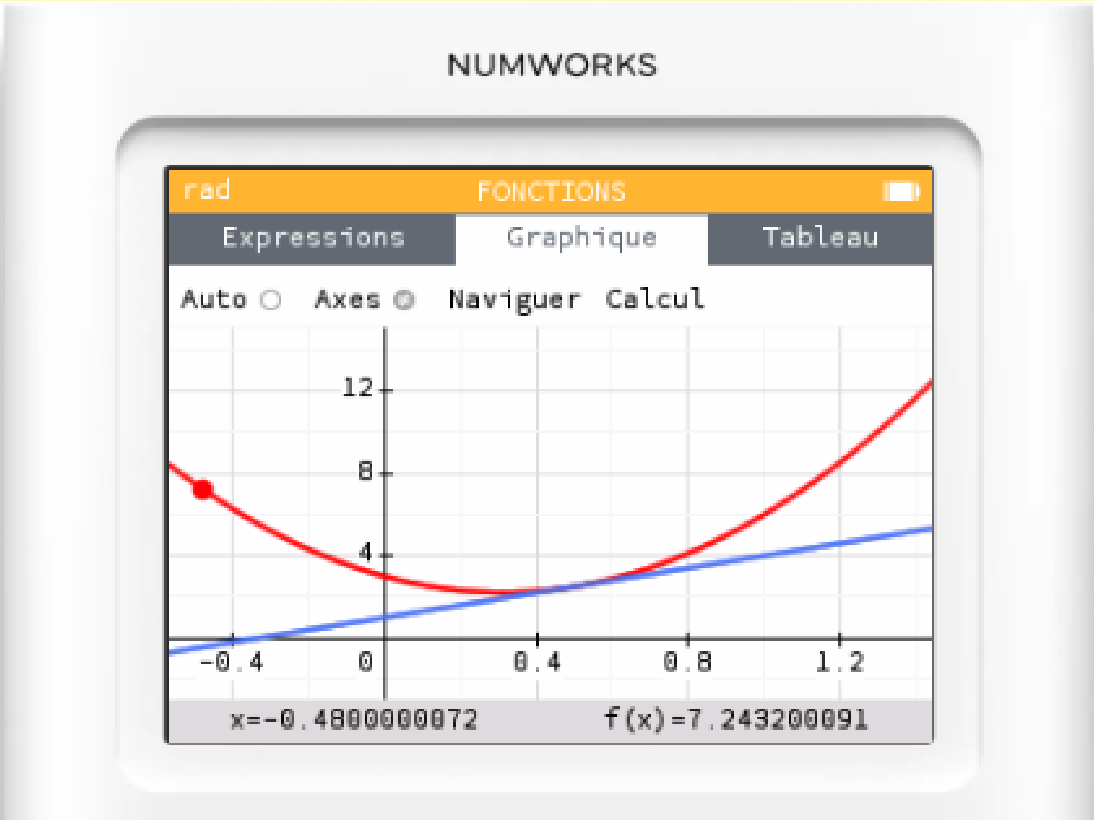
2) Étudier la position relative de C_f et C_g

On résoud l'inéquation $f(x) - g(x) \leqslant 0$. Les solutions de l'inéquation indiqueront quand C_f est en dessous de C_g. $f(x) - g(x) \leqslant 0 \iff 8x^2 - 5x + 3 - 3x - 1 \leqslant 0 \iff 8x^2 - 8x + 2 \leqslant 0$
$\Delta = 0 \iff x_0 = -\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$S = 0$ C_f est toujours au-dessus de C_g sauf pour $x = \dfrac{1}{2}$ ou les 2 courbes sont confondus.

3) Tracer C_f et C_g dans un même repère. Le graphique confirme-t-il la réponse à la question 2. ?



On retrouve bien le résultat de la question 2).

Exercice 4 - Inéquations Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $6x^2+7x+2>0$

$\Delta = 1 \iff x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2) $-5x^2+10x+1<0$

$\Delta = 120 \iff x_1 = \frac{5-\sqrt{30}}{5}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{30}}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{30}}{5}$		$\frac{5+\sqrt{30}}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty; \frac{5-\sqrt{30}}{5}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{30}}{5}; +\infty\right[$

3) $49x^2+28x+4<0$

$\Delta = 0 \quad x_0 = -\dfrac{2}{7}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{7}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$S = \varnothing$

4) $-2x^2 + 4x - 4 > 0$

$\Delta = -16 \iff$ pas de racines

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

$S = \varnothing$.

5) $7x^2 > 3x - 5$

$7x^2 - 3x + 5 > 0$
$\Delta = -131 \iff$ pas de racines

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

$S = \mathbb{R}$

6) $-x^2 + x > 1$

$-x^2 + x - 1 > 0$
$\Delta = -3 \iff$ pas de racines

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

$S = \varnothing$.

7) $-x^2 + x > 1$

identique au 6)

8) $2x \leqslant 5x^2 + 4$

$0 \leqslant 5x^2 - 2x + 4 \iff 5x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$
$\Delta = -76 \iff$ pas de racines

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

$S = \mathbb{R}$

9) $8x^2 - 10 > 7x^2$

$8x^2 - 7x^2 - 10 > 0 \iff x^2 - 10 > 0 \iff (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})$

x	$-\infty$		$-\sqrt{10}$		$\sqrt{10}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty; -\sqrt{10}\right[\cup \left]\sqrt{10}; +\infty\right[$

10) $\dfrac{4}{3}x^2 < \dfrac{2}{7}x + 3$

$\dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{2}{7}x - 3 < 0$

$\Delta = \dfrac{788}{49} \iff x_1 = \dfrac{3-3\sqrt{197}}{28}$ et $x_2 = \dfrac{3+3\sqrt{197}}{28}$

x	$-\infty$		$\dfrac{3-3\sqrt{197}}{28}$		$\dfrac{3+3\sqrt{197}}{28}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]\dfrac{3-3\sqrt{197}}{28}; \dfrac{3+3\sqrt{197}}{28}\right[$

11) $(2x-3)\times(6x+4) > x^2 - 6$

$(2x-3)\times(6x+4) > x^2 - 6 \iff 12x^2 - 18x + 8x - 12 - x^2 + 6 > 0 \iff 11x^2 - 10x - 6 > 0$

$\Delta = 364 \iff x_1 = \dfrac{5-\sqrt{91}}{11}$ et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{91}}{11}$

x	$-\infty$		$\dfrac{5-\sqrt{91}}{11}$		$\dfrac{5+\sqrt{91}}{11}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty; \dfrac{5-\sqrt{91}}{11}\right[\cup \left]\dfrac{5+\sqrt{91}}{11}; +\infty\right[$

Exercice 5 - Factoriser Factoriser $f(x)$ par la méthode la plus adaptée.

1) $f(x) = 137x^2 - x - 136$

$f(1) = 137\times 1^2 - 1 - 136 = 137 + -1 - 136 = 0$. 1 est une racine évidente.

$P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{136}{137} \iff x_2 = \dfrac{136}{137}$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 137(x-1)\left(x - \dfrac{136}{137}\right) = (x-1)(137x-136)$

2) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$

$f(1) = 4\times 1^2 - 8\times 1 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$. 1 est une racine évidente.

$P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{4} = 1 \iff x_2 = 1 = x_1$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 4(x-1)^2$

3) $f(x) = -x^2 + x + 12$

$\Delta = 49 \quad x_1 = -3$ et $x_2 = 4$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -(x-(-3))(x-4) = -(x+3)(x-4)$

4) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

$\Delta = 9 \quad x_1 = 2$ et $x_2 = 5$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = (x-2)(x-5)$

5) $f(x) = -x^2 + 9$

$f(x) = 9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3-x)(3+x)$

6) $f(x) = -6x^2 + 25x - 14$

$\Delta = 289 \quad x_1 = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{7}{2}$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -6\left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(x - \dfrac{7}{2}\right) = -(3x - 2)(2x - 7)$