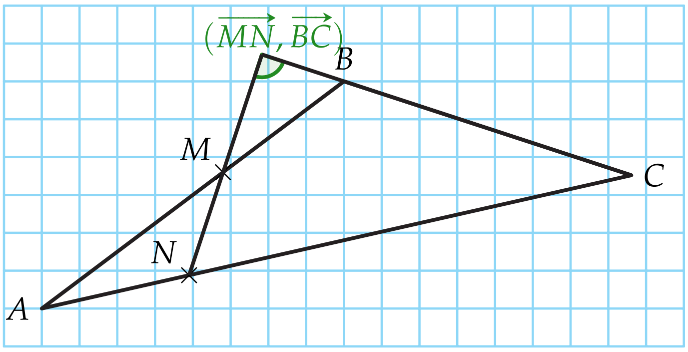
Chapitre 4

Produit Scalaire
Exercices de recherches et correction

Ex 48 p 253

Soit le triangle ABC tel que $AB = 10, AC = 16$ et $BC = 8$ et soit les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\text{AN}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AC}}$



1) Calculer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - AC^2)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 - AB^2)\right) \\
&= \frac{3}{10}\left(10^2 + 8^2 - 16^2\right) + \frac{1}{8} \times \left(16^2 + 8^2 - 10^2\right) \\
&= -\frac{1}{10} = -0,1
\end{aligned}$$

2) Calculer MN^2.

$$\begin{aligned}
MN^2 = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \\
&= \left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{9}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{9}{25} \times AB^2 - \frac{3}{20}(AB^2 + AC^2 - BC^2) + \frac{1}{16} \times AC^2 \\
&= \frac{9}{25} \times 10^2 - \frac{3}{20}(10^2 + 16^2 - 8^2) + \frac{1}{16} \times 16^2 \\
&= \frac{41}{5} = 8,2
\end{aligned}$$

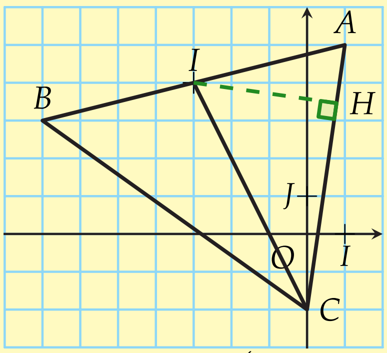
3) En déduire une valeur approchée en degré à 10^{-1} près de l'angle géométrique $\left|(\overrightarrow{\text{MN}}, \overrightarrow{\text{BC}})\right|$.

On sait que $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{10} = -0,1$ et que $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = MN \times BC \times \cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC})$
D'ou :
$(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}) = \arccos\left(\dfrac{-0,1}{\sqrt{8,2}\times 8}\right) \approx 90,25°$

Ex 54 p 254

Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respectives $(1;5)$, $(-7;3)$, $(0;-2)$ et soit I le milieu du segment $[AB]$.

Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle ACI.



L'aire du triangle ACI est $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times IH}{2}$ or dans le triangle rectangle AIH, on a : $IH = AI \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)$ donc l'aire du triangle ACI est $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times AI \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)}{2}$

Le point

On calcule l'angle $\widehat{BAC}$ à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$:

I a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ soit $I(-3;4)$.

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -3-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow AI = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-1 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} \Longrightarrow AC = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}$

D'une part : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = -4 \times (-1) + (-1) \times (-7) = 11$ et d'autre part :
$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = AI \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = \sqrt{17} \times \sqrt{50} \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

On a donc $\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{11}{\sqrt{17}\times\sqrt{50}}\right) \approx 67,8°$ Finalement :

$$\mathcal{A} = \frac{AC \times AI \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)}{2} = \frac{\sqrt{50}\times\sqrt{17}\times\sin\left(\arccos\left(\dfrac{11}{\sqrt{17}\times\sqrt{50}}\right)\right)}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$$

Ex 55 p 254

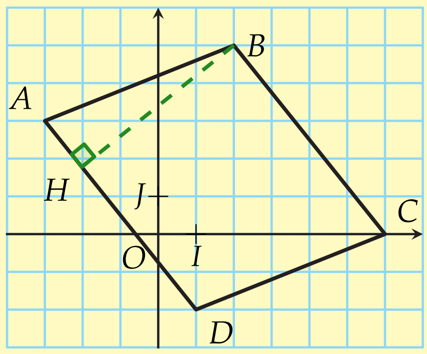
Soit A, B, C, D quatre points du plan de coordonnées respectives : $(-3;3)$, $(2;5)$, $(6;0)$ et $(1;-2)$.

1) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6-1 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc d'après la règle du parallélogramme, ABCD est un parallélogramme.



2) Déterminer une valeur approchée de l'aire de $ABCD$ à 10^{-2} près.

L'aire du parallélogramme est $\mathcal{A} = HB \times AD$ or dans le triangle rectangle ABH, on a : $HB = AB \times \sin\left(\widehat{BAD}\right)$ donc l'aire du parallélogramme est $A = AD \times AB \times \sin\left(\widehat{BAD}\right)$

On calcule l'angle $\widehat{BAD}$ à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ -2-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 5\times 4 + 2\times(-5) = 10$

On a $AD = \sqrt{4^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$ et $AB = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$

D'autre part $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AD \times AB \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) = \sqrt{41}\times\sqrt{29}\times\cos\left(\widehat{BAD}\right)$

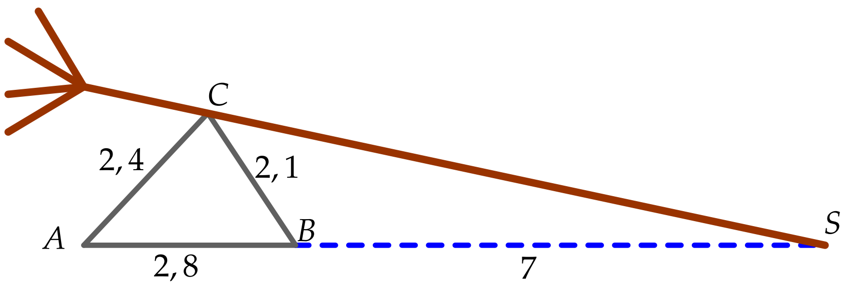
Donc $10 = \sqrt{41}\times\sqrt{29}\times\cos\left(\widehat{BAD}\right) \iff \widehat{BAD} = \arccos\left(\dfrac{10}{\sqrt{41}\times\sqrt{29}}\right) \approx 73,14°$

$\mathcal{A} = AD \times AB \times \sin\left(\widehat{BAD}\right) = \sqrt{41}\times\sqrt{29}\times\sin\left(\arccos\left(\dfrac{10}{\sqrt{41}\times\sqrt{29}}\right)\right) = 33$

Ex 70 p 255

Dans un jeu vidéo, Super Ninja court pour échapper à ses ennemis. Il arrive au bord d'une rivière de 7 mètres de large et aperçoit un rocher triangulaire sur l'autre rive. Vite ! Super Ninja doit couper un arbre pour traverser la rivière en le posant sur la pointe du rocher. Mais quelle longueur doit avoir au minimum son arbre ? Heureusement que Super Ninja connaît les dimensions (en mètre) du rocher...

En utilisant les données de la figure ci-dessous, calculer SC. On arrondira au mètre près.



Dans le triangle BAC, on calcule l'angle $\widehat{BAC}$ à l'aide du produit scalaire.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(2,8^2 + 2,4^2 - 2,1^2\right) = 4,595$

D'autre part : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2,8 \times 2,4 \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

d'où : $4,595 = 2,8 \times 2,4 \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \iff \cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{4,595}{2,8 \times 2,4} = \dfrac{919}{1344}$

On se place maintenant dans le triangle ASC

$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = AS \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 9,8 \times 2,4 \times \dfrac{919}{1344} = \dfrac{6433}{400}$

D'autre part : $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AS^2 + AC^2 - SC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(9,8^2 + 2,4^2 - SC^2\right)$

d'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{6433}{400} = \frac{1}{2}\left(9,8^2 + 2,4^2 - SC^2\right) \\
\iff &\frac{6433}{200} = 9,8^2 + 2,4^2 - SC^2 \\
\iff &SC^2 = 9,8^2 + 2,4^2 - \frac{6433}{200} \\
\iff &SC^2 = 69,635 \\
\iff &SC = \sqrt{69,635} \approx 8,34m
\end{aligned}$$