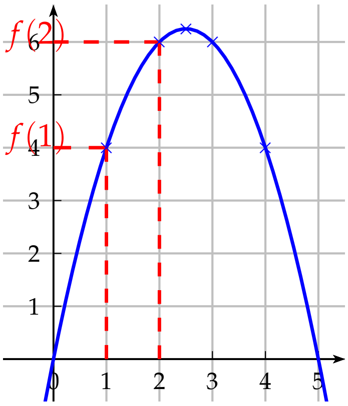
Chapitre 6

Variations d'une fonction

I. Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction

Exemple : On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.



Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $[0; 2,5]$, les valeurs de f sont également croissantes.

Par exemple : $1 < 2$ et $f(1) < f(2)$.

Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $[2,5; 5]$, les valeurs de f sont décroissantes.

Par exemple : $3 < 4$ et $f(3) > f(4)$.

On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 2,5]$ et décroissante sur l'intervalle $[2,5; 5]$.

Remarques

- Intuitivement, on dit qu'une **fonction est croissante** lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on **monte**.
- On dit qu'une **fonction est décroissante** lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on **descend**.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f **est croissante sur I** signifie que pour tous réels a et b de I :

si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$;

- Dire que f **est décroissante sur** I signifie que pour tous réels a et b de I :
  si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.
- Dire que f **est monotone sur** I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarques

- ☞ On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- ☞ On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- ☞ Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I.

II. maximum, minimum

Exemple : On reprend la fonction f définie dans l'exemple du paragraphe 1.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;5]$, on a : $f(x) \leq 6,25$. $6,25$ est le maximum de la fonction f.

Définition

Soit f une fonction de l'intervalle I. a et b deux nombres réels de I.

— Dire que f **admet un maximum** M **en** a **de** I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leq M = f(a)$.

— Dire que f **admet un minimum** m **en** b **de** I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geq m = f(b)$.

III. Tableau de variations

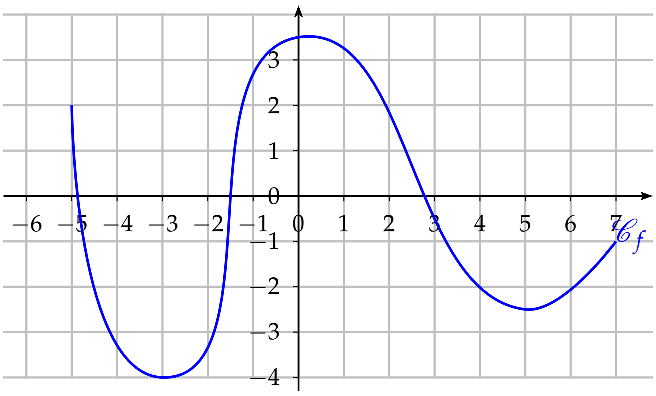
Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

Exemple : On reprend la fonction f définie dans l'exemple du paragraphe 1.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;2,5]$ et décroissante sur l'intervalle $[2,5;5]$.
$f(0) = 0$ $f(2,5) = 6,25$ $f(5) = 0$

x	0		$2{,}5$		5
$f(x)$			$6{,}5$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Méthode - Déterminer graphiquement les variations d'une fonction

On considère la représentation graphique de la fonction f :



1) Donner son ensemble de définition.

2) Donner les variations de la fonction.

3) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.

4) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

5) comparer $f(2)$ et $f(3)$

Solution :

1) La fonction f est définie sur $[-5;7]$.

2) La fonction f est croissante sur les intervalles $[-4;0]$ et $[5;7]$. Elle est décroissante sur les intervalles $[-5;-4]$ et $[0;5]$.

3) Le maximum de f est $3,5$. Il est atteint en $x = 0$.
Le minimum de f est -4. Il est atteint en $x = -4$.

4)

x	-5		-3		0		5		7
$f(x)$	2	$\searrow$		$\nearrow$	$3{,}5$	$\searrow$		$\nearrow$	-1
			-4				$-2{,}5$		

5) 2 et $3 \in [0;5]$. on a $2 < 3$ et sur $[0;5]$ la fonction f est décroissante et renverse l'ordre donc $f(2) \geqslant f(3)$