

## Chapitre 1

# Fonctions polynôme de degré 2

## I. Forme développée

### 🗨️ Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par une expression de la forme :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où les coefficients  $a, b$  et  $c$  sont des réels donnés avec  $a \neq 0$ .

📌 **Remarque** Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage « *trinôme* ».

### 🔗 Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra 🗑️ créer trois curseurs  $a, b, c$  puis dans la ligne de saisie taper  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . On obtient ainsi le tracé de la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  on s'intéressera aux cas où  $a \neq 0$ . (si  $a = 0$   $f$  est une fonction affine)

### 🗨️ Définition

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée **parabole**.

### 🔗 Exemple :

- $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$  ou  $g(x) = (x - 4)(5 - 2x)$  sont des fonctions polynômes de degré 2.
- $h(x) = 5x - 3$  est une fonction polynôme de degré 1.
- $i(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$  est une fonction polynôme de degré 4.

## Variations de la fonction trinôme


### 🔗 Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra 🗑️, reprendre la manipulation précédente et prendre un  $a > 0$ . Faire alors varier  $b$  et  $c$ . Que constatez-vous quant variations de  $f$ ? Et si on prend un autre  $a$  strictement positif? Conjecturer les variations de  $f$  en complétant le tableau de variation suivant :

$x$	
$f(x)$	

1er cas  $a > 0$  :

**Manipulation**

Sur le logiciel GeoGebra , reprendre la manipulation précédente et prendre un  $a < 0$ . Faire alors varier  $b$  et  $c$ . Que constatez-vous quant variations de  $f$ ? Et si on prend un autre  $a$  strictement négatif? Conjecturer les variations de  $f$  en complétant le tableau de variation suivant :

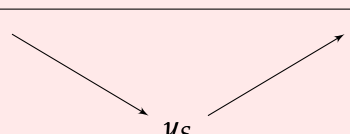
$x$	
$f(x)$	

2ème cas  $a < 0$  :

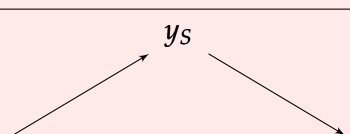
Nous retiendrons donc :

**Propriété**

Si  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$x_S$	$+\infty$
$f(x)$			

Si  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$x_S$	$+\infty$
$f(x)$			

**Définition**

le point de coordonnées  $(x_S; y_S)$  avec  $y_S$  l'extremum de  $f$  sur  $P$  est appelé **sommet de la parabole**.

## II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

**Propriété**

Toute fonction polynôme  $f$  de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  peut s'écrire sous la forme :  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle **la forme canonique de  $f$** .


**Démonstration**

Comme  $a \neq 0$ , on peut écrire pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x \right] + c \\
 &= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c \\
 &= a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
 &= a(x - \alpha)^2 + \beta \\
 &\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.
 \end{aligned}$$

### 🔗 Manipulation

Sur le logiciel GeoGebra  créer trois curseurs  $a, \alpha, \beta$  puis dans la ligne de saisie taper  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . On obtient ainsi le tracé de la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . Compléter alors le cas général ci-dessous.

### ⚙️ Propriété

Le sommet S a pour coordonnées  $(\alpha; \beta)$

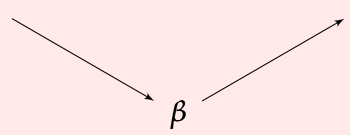
### ⚙️ Propriété

La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation  $x = \alpha$ .

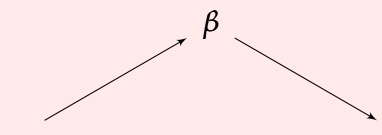
Avec ces nouvelles données, on peut maintenant compléter notre tableau de variations :

### ⚙️ Propriété

Si  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$			

Si  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$			

## III. passage de la forme développée à la forme canonique

Pour passer de la forme développée à la forme canonique, il existe 2 méthodes

### 1) passer à la forme canonique à l'aide d'identité remarquable

#### ☰ Méthode - Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

##### Énoncé :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$ .

On veut exprimer la fonction  $f$  sous sa forme canonique.

##### Réponse :

$f$  doit être de la forme :  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  ou  $a, \alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels.

$$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$$

On commence par mettre le  $a$  en facteur pour les 2 termes avec des  $x$

$$f(x) = 2[x^2 - 10x] + 10$$

On fait ensuite apparaître le 3ème terme d'une identité remarquable ( $a^2 + 2ab + b^2$  ou  $a^2 - 2ab + b^2$ )

$$f(x) = 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10$$

On factorise l'identité remarquable et on regroupe les termes qui restent ensemble.

$$f(x) = 2[(x - 5)^2 - 25] + 10$$

$$f(x) = 2(x - 5)^2 - 50 + 10$$

$$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$$

$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$  est la forme canonique de  $f$ .

## 2) Cas général

### ⚙️ Propriété

Pour passer de la forme développée à la forme canonique (ou inversement), on peut utiliser les formules :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

🔗 **Exemple** : Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 3x^2 + 60x - 20$ . On veut exprimer la fonction  $f$  sous sa forme canonique.

On commence par calculer  $\alpha$  :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2 \times 3} = -10.$$

Pour calculer  $\beta$ , on a 2 possibilités : soit on utilise la formule ci-dessus, soit on dit que  $\beta = f(\alpha)$  et on remplace  $x$  par  $\alpha$  dans l'expression  $f(x)$