Chapitre 1

Repérage

I. Repères et coordonnées

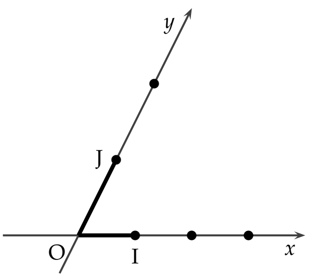
1) Repères

Définition

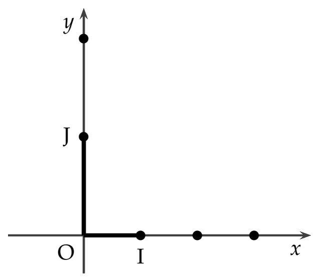
Repère du plan : Trois points **distincts** et **non alignés** O, I et J forment un **repère du plan** que l'on note **(O,I,J)**.

Les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

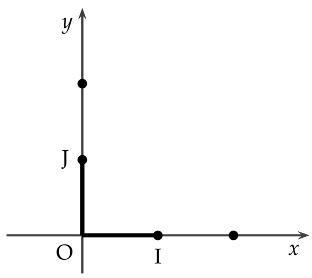
- Le point O s'appelle **l'origine** du repère.
- L'axe (OI) s'appelle l'axe des **abscisses** et la distance OI donne l'unité sur cet axe.
- L'axe (OJ) s'appelle l'axe des **ordonnées** et la distance OJ donne l'unité sur cet axe.



Repère **quelconque**



Repère **orthogonal**
(OI) $\perp$ (OJ)

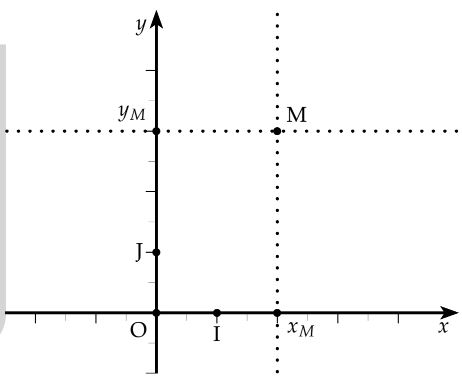


Repère **orthonormé**
(OI) $\perp$ (OJ) et OI $=$ OJ

2) Coordonnées d'un point et du milieu d'un segment dans un repère quelconque

Définition

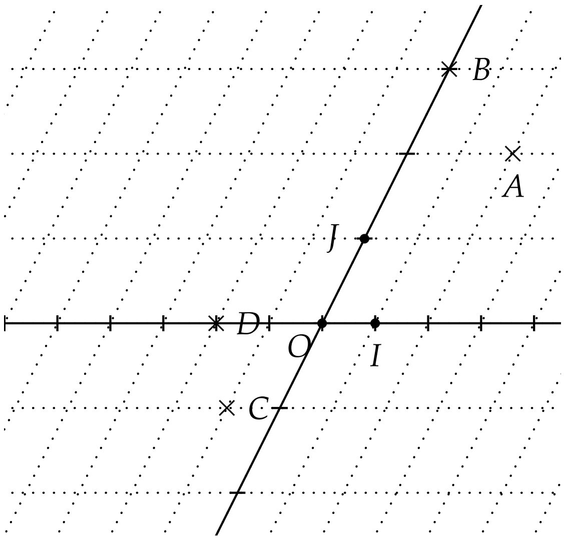
(Coordonnées d'un point du plan) Repérer un point M dans un repère (O; I; J), c'est donner l'unique couple de nombres réels (x_M ;y_M) appelé coordonnées du point M.
Le nombre x_M est l'abscisse du point M et le nombre y_M est l'ordonnée du point M.
On le note M(x_M ; y_M).



Méthode

Pour trouver les coordonnées d'un point dans un repère non orthogonal, on trace les parallèles aux axes passant par les points, puis on lit les coordonnées des points projetés.

Exemple :



1) Le repère (O ; I ; J) est-il orthonormé ? orthogonal ?
2) Lire les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère (O ; I ; J).
3) Déterminer les coordonnées de tous les points dans le repère (O ; I ; B).

Réponse :

1) Le repère (O ; I ; J) n'est pas normé ($OI \neq OJ$) et n'est pas orthogonal ($\widehat{IOJ} \neq 90°$)
2) $A(2;2)$, $B(0;3)$, $C(-1;1)$, et $D(-2;0)$
3) $A(2;\dfrac{2}{3})$, $B(0;1)$, $C(-1;\dfrac{1}{3})$, $D(-2;0)$, $I(1;0)$, $J(0;\dfrac{1}{3})$ et $O(0;0)$

Exercice

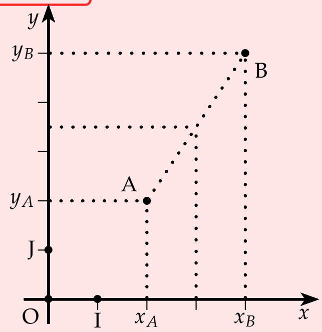
Exercices 1, 2 et 3 de la fiche

3) Milieu d'un segment

Propriété - (Coordonnées du milieu d'un segment dans un repère)

Dans un repère **quelconque** du plan : Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.



Exemple : : Dans le repère (O;I;J), on veut déterminer les coordonnées de M milieu de [AB] et N milieu de [AC].
Les coordonnées de A, B et C sont : A(1 ; 4) B(5 ; 2) C(−2 ; −2)

Les coordonnées de M milieu de [AB] sont :
$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1 + 5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$
$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4 + 2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ donc M(3 ; 3).
Les coordonnées de N milieu de [AC] sont :
$x_N = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1 + (-2)}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$
$y_N = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{4 + (-2)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc N(−0,5 ; 1).

Exercice

Exercices 4 et 5 de la fiche

II. Distances et longueurs dans un repère ORTHONORME

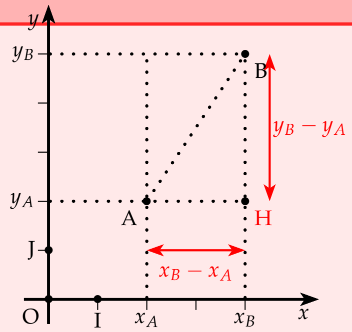
1) Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété

Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un **repère orthonormé** :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Attention : cette formule est
valable uniquement si le repère est orthonormé.



Démonstration

On voit que : $AH = x_B - x_A$ et $BH = y_B - y_A$.
Le triangle ABH est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AH^2 + BH^2$
Donc $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ car AB est une longueur donc positive.

Exemple : : Les coordonnées de A, B et C sont : A(1 ; 4) B(5 ; 2) C(−2 ; −2).

- Calculons les longueurs AB, AC et BC. Le repère (O,I,J) ci-dessus est orthonormé donc on peut utiliser la formule ci-dessus :

  AB $= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

  AC $= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

  BC $= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$
- Que peut-on dire du triangle ABC ?
  Il semble que ABC soit un triangle rectangle en A. **Prouvons-le :**

  $AB^2 + AC^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{45})^2 = 20 + 45 = 65$ et $BC^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$.
  Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A

Exercice

Exercices 6 à 11 de la fiche

Bilan

Exercices 12 à 16 de la fiche