

Correction - Exercices facultatifs

Équations du 2nd degré

Exercice 1 - Racine évidente Factoriser les fonctions polynômes du second degré sans calculer leur discriminant.

1) $f : x \mapsto -6x^2 + 10x - 4$

$$f(1) = -6 \times 1^2 + 10 \times 1 - 4 = -6 + 10 - 4 = 0. \text{ 1 est une racine évidente.}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \iff x_2 = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -6(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

2) $g : x \mapsto 6x^2 + 2x - 20$

$$f(-2) = 6 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 20 = 24 - 4 - 20 = 0. \text{ -2 est une racine évidente.}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-20}{6} = -\frac{10}{3} \iff x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 6(x + 2)\left(x + \frac{5}{3}\right)$$

3) $h : x \mapsto 4x^2 - 14x + 12$

$$f(2) = 4 \times (2)^2 - 14 \times 2 + 12 = 16 - 28 + 12 = 0. \text{ 2 est une racine évidente.}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{4} = 3 \iff x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 4(x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

4) $k : x \mapsto 2x^2 - 8x + 8$

$$f(2) = 2 \times (2)^2 - 8 \times 2 + 8 = 8 - 16 + 8 = 0. \text{ 2 est une racine évidente.}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{2} = 4 \iff x_2 = 2 = x_1$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 2)(x - 2) = 2(x - 2)^2$$

Exercice 2 - Equations Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1) $-2x^2 + x - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = -7$$

$$\Delta < 0 \text{ donc } S = \emptyset$$

2) $2x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$

3) $5x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 1 = -16$$

$$\Delta < 0 \text{ donc } S = \emptyset$$

4) $2x^2 + 4 = -6x$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 2 \times 4 = 4$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times 2} = -1$$

$$S = \{-2; -1\}$$

5) $x(2x - 1) = 1$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 1$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$$

6) $x^2 = -5x - 1$

$$x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 1 = 21$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

$$S = \left\{\frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}\right\}$$

7) $-x + 3x^2 - 1 = 0$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 13$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$S = \left\{\frac{1 - \sqrt{13}}{6}; \frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right\}$$

8) $x(8 - x) + 1 = 0$

$$-x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 68$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{68}}{2 \times (-1)} = 4 + \sqrt{17} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{68}}{2 \times (-1)} = 4 - \sqrt{17}$$

$$S = \{4 - \sqrt{17}; 4 + \sqrt{17}\}$$

9) $2x^2 + 6x + \frac{9}{2} = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{2} = 0$$

$\Delta = 0$ donc 1 solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

10) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$$

$\Delta = 0$ donc 1 solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$S = \{-\sqrt{3}\}$$

11) $-3x^2 + x = -\frac{1}{4}$

$$-3x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-3) \times \frac{1}{4} = 4$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{4}}{2 \times (-3)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{4}}{2 \times (-3)} = -\frac{1}{6}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{6}; \frac{1}{2} \right\}$$

12) $2x(5 + 2x) = 9 - 2x$

$$10x + 4x^2 - 9 + 2x = 0 \iff 4x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 4 \times (-9) = 288$$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - \sqrt{288}}{2 \times 4} = \frac{-3 - 3\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + \sqrt{288}}{2 \times 4} = \frac{-3 + 3\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-3 - 3\sqrt{2}}{2}; \frac{-3 + 3\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Exercice 3 - Inéquations et représentations graphiques

f et g sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 8x^2 - 5x + 3$ et $g(x) = 3x + 1$, de représentations graphiques C_f et C_g

- 1) Préciser la nature de C_f et de C_g

$f(x)$ est une fonction du second degré. C_f est donc une parabole.

$g(x)$ est une fonction affine. C_g est donc une droite.

- 2) Étudier la position relative de C_f et C_g

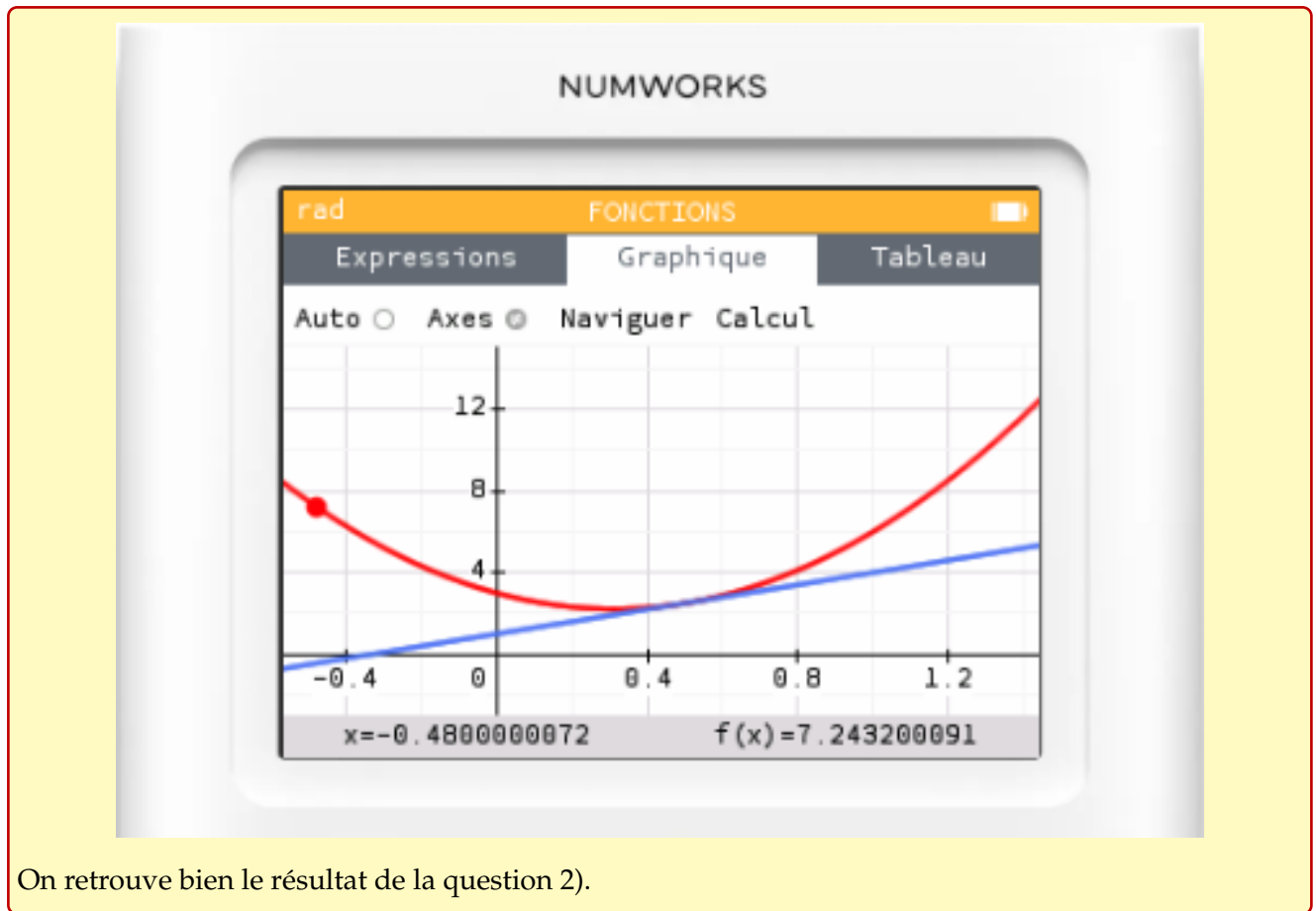
On résout l'inéquation $f(x) - g(x) \leq 0$. Les solutions de l'inéquation indiqueront quand C_f est en dessous de C_g . $f(x) - g(x) \leq 0 \iff 8x^2 - 5x + 3 - 3x - 1 \leq 0 \iff 8x^2 - 8x + 2 \leq 0$

$$\Delta = 0 \iff x_0 = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

$S = 0$ C_f est toujours au-dessus de C_g sauf pour $x = \frac{1}{2}$ où les 2 courbes sont confondues.

- 3) Tracer C_f et C_g dans un même repère. Le graphique confirme-t-il la réponse à la question 2. ?



Exercice 4 - Inéquations Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

1) $6x^2 + 7x + 2 > 0$

$$\Delta = 1 \iff x_1 = -\frac{2}{3} \text{ et } x_2 = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$S =] -\infty; -\frac{2}{3} [\cup] -\frac{1}{2}; +\infty [$$

2) $-5x^2 + 10x + 1 < 0$

$$\Delta = 120 \iff x_1 = \frac{5 - \sqrt{30}}{5} \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{30}}{5}$$

x	$-\infty$	$\frac{5 - \sqrt{30}}{5}$	$\frac{5 + \sqrt{30}}{5}$	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$S =] -\infty; \frac{5 - \sqrt{30}}{5} [\cup] \frac{5 + \sqrt{30}}{5}; +\infty [$$

3) $49x^2 + 28x + 4 < 0$

$$\Delta = 0 \quad x_0 = -\frac{2}{7}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{7}$	$+\infty$
$f(x)$		0	
	+		+

$$S = \emptyset$$

4) $-2x^2 + 4x - 4 > 0$

$$\Delta = -16 \iff \text{pas de racines}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		
	-	

$$S = \emptyset.$$

5) $7x^2 > 3x - 5$

$$7x^2 - 3x + 5 > 0$$

$$\Delta = -131 \iff \text{pas de racines}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		
	+	

$$S = \mathbb{R}$$

6) $-x^2 + x > 1$

$$-x^2 + x - 1 > 0$$

$$\Delta = -3 \iff \text{pas de racines}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		
	-	

$$S = \emptyset.$$

7) $-x^2 + x > 1$

identique au 6)

8) $2x \leq 5x^2 + 4$

$$0 \leq 5x^2 - 2x + 4 \iff 5x^2 - 2x + 4 \geq 0$$

$$\Delta = -76 \iff \text{pas de racines}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		
	+	

$$S = \mathbb{R}$$

9) $8x^2 - 10 > 7x^2$

$$8x^2 - 7x^2 - 10 > 0 \iff x^2 - 10 > 0 \iff (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$	$+\infty$
$f(x)$		0	0	
	+		-	+

$$S =]-\infty; -\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10}; +\infty[$$

$$10) \frac{4}{3}x^2 < \frac{2}{7}x + 3$$

$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3 < 0$$

$$\Delta = \frac{788}{49} \iff x_1 = \frac{3 - 3\sqrt{197}}{28} \text{ et } x_2 = \frac{3 + 3\sqrt{197}}{28}$$

x	$-\infty$	$\frac{3 - 3\sqrt{197}}{28}$	$\frac{3 + 3\sqrt{197}}{28}$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$S = \left] \frac{3 - 3\sqrt{197}}{28}; \frac{3 + 3\sqrt{197}}{28} \right[$$

$$11) (2x - 3) \times (6x + 4) > x^2 - 6$$

$$(2x - 3) \times (6x + 4) > x^2 - 6 \iff 12x^2 - 18x + 8x - 12 - x^2 + 6 > 0 \iff 11x^2 - 10x - 6 > 0$$

$$\Delta = 364 \iff x_1 = \frac{5 - \sqrt{91}}{11} \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{91}}{11}$$

x	$-\infty$	$\frac{5 - \sqrt{91}}{11}$	$\frac{5 + \sqrt{91}}{11}$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$S = \left] -\infty; \frac{5 - \sqrt{91}}{11} \right[\cup \left] \frac{5 + \sqrt{91}}{11}; +\infty \right[$$

Exercice 5 - Factoriser Factoriser $f(x)$ par la méthode la plus adaptée.

$$1) f(x) = 137x^2 - x - 136$$

$$f(1) = 137 \times 1^2 - 1 - 136 = 137 + -1 - 136 = 0. 1 \text{ est une racine évidente.}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{136}{137} \iff x_2 = \frac{136}{137}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 137(x - 1) \left(x - \frac{136}{137} \right) = (x - 1)(137x - 136)$$

$$2) f(x) = 4x^2 - 8x + 4$$

$$f(1) = 4 \times 1^2 - 8 \times 1 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0. 1 \text{ est une racine évidente.}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{4} = 1 \iff x_2 = 1 = x_1$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 4(x - 1)^2$$

$$3) f(x) = -x^2 + x + 12$$

$$\Delta = 49 \quad x_1 = -3 \text{ et } x_2 = 4$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -(x - (-3))(x - 4) = -(x + 3)(x - 4)$$

$$4) f(x) = x^2 - 7x + 10$$

$$\Delta = 9 \quad x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 5$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x - 5)$$

$$5) f(x) = -x^2 + 9$$

$$f(x) = 9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$$

6) $f(x) = -6x^2 + 25x - 14$

$$\Delta = 289 \quad x_1 = \frac{2}{3} \text{ et } x_2 = \frac{7}{2}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -6 \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x - \frac{7}{2}\right) = -(3x - 2)(2x - 7)$$