

Chapitre 4

Correction - Exercices d'entraînement

Notion de vecteur

I. Notion de vecteur

Exercice 1 (Vecteurs et translations)

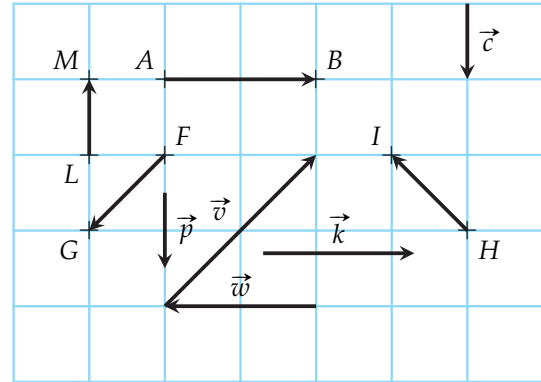
On considère les vecteurs ci-contre représentés sur un quadrillage.

- 1) Repérer les vecteurs égaux, les vecteurs opposés et les vecteurs de même norme.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \vec{k} sont égaux. Les vecteurs \vec{p} et \vec{c} le sont aussi.

Les vecteurs \vec{w} et \vec{k} sont opposés. Les vecteurs \vec{w} et \overrightarrow{AB} aussi. Ainsi que les vecteurs \overrightarrow{ML} et \vec{p} et les vecteurs \overrightarrow{ML} et \vec{c} .

Les vecteurs \overrightarrow{HI} et \overrightarrow{FG} ont la même norme. Les vecteurs égaux et opposés précédemment cités ont aussi forcément la même norme.



- 2) Quelle est l'image du point F par la translation de vecteur \overrightarrow{LM} ?

L'image de F par la translation de vecteur \overrightarrow{LM} est A .

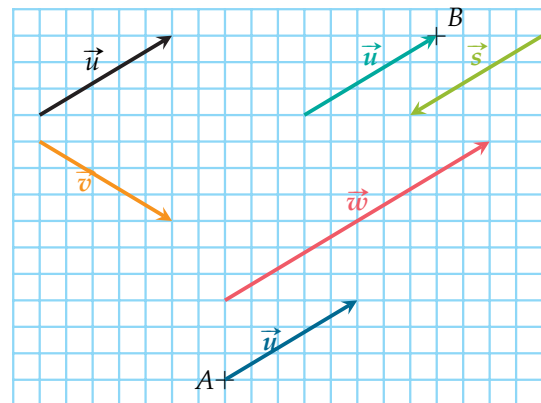
- 3) Par quelles translations le point A est-il l'image du point B ?

A est l'image de B par la translation de vecteur $-\vec{k}$ (ou de vecteur \vec{w}).

Exercice 2 (Tracer des vecteurs)

Dans le quadrillage ci-contre :

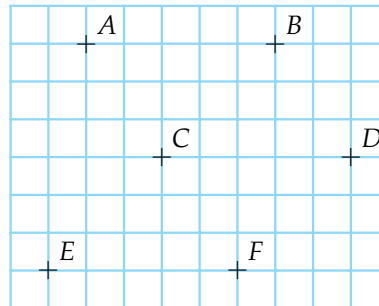
- Tracer un représentant du vecteur \vec{u} ayant pour origine le point A .
- Tracer un représentant du vecteur \vec{u} ayant pour extrémité le point B .
- Tracer un vecteur \vec{v} de même longueur que \vec{u} mais différent de \vec{u} .
- Tracer un vecteur \vec{w} de même direction, de même sens que \vec{u} , mais différents de \vec{u} .
- Tracer un vecteur \vec{s} de même direction et de même longueur que \vec{u} mais différent de \vec{u} .



Exercice 3 (Vecteurs égaux et vecteurs opposés)

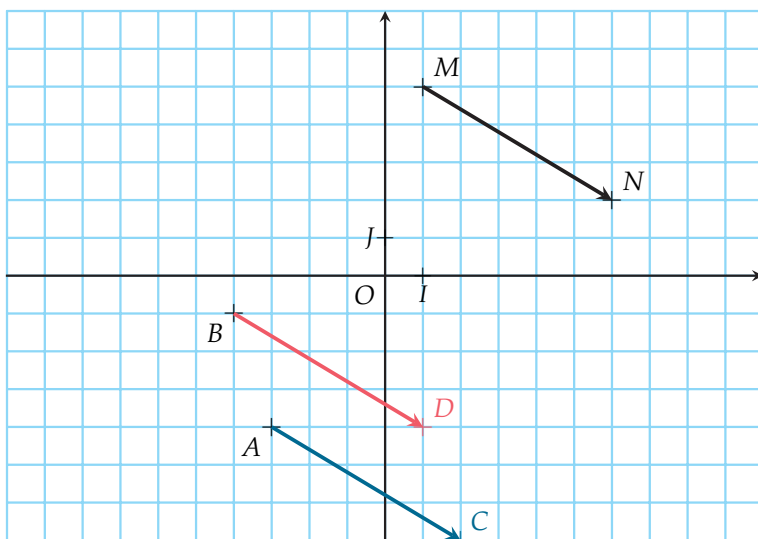
En utilisant le quadrillage, dire pour chaque égalité si elle est vraie ou si elle est fausse.

- 1) $\vec{AB} = \vec{EF}$ Vrai
- 2) $\vec{CD} = -\vec{AB}$ Faux
- 3) $\vec{DA} = \vec{DB}$ Faux
- 4) $\vec{ED} = \vec{BD}$ Faux
- 5) $\vec{AE} = \vec{BF}$ Vrai
- 6) $\vec{EF} = -\vec{DC}$ Vrai



II. Opérations sur les vecteurs

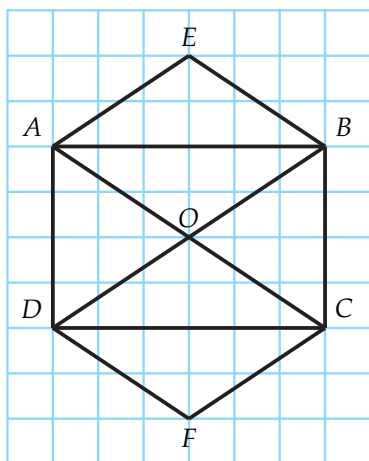
Exercice 4 (Règle du parallélogramme)



- 1) Tracer le point C image du point A par la translation de vecteur \vec{MN}
- 2) Tracer le point D image du point B par la translation de vecteur \vec{MN} .
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère ACDB? Justifier votre réponse.

On a $\vec{AC} = \vec{BD} = \vec{MN}$ donc d'après la règle du parallélogramme ACDB est un parallélogramme.

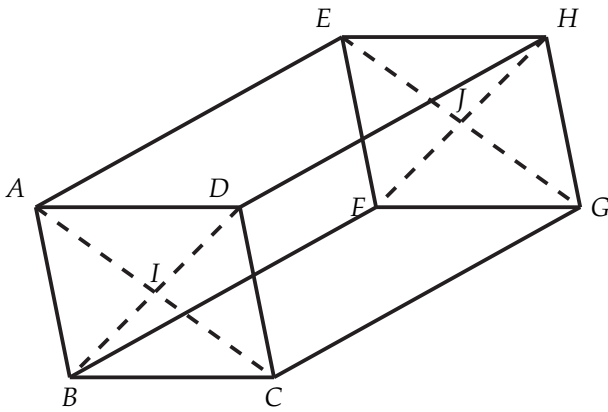
Exercice 5 (Somme de vecteurs)



Calculer les sommes vectorielles indiquées en utilisant la figure ci-contre :

- 1) $\vec{AE} + \vec{AO} = \vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB}$
- 2) $\vec{AE} + \vec{DF} = \vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB}$
- 3) $\vec{BD} - \vec{BA} - \vec{AO} = \vec{BD} + \vec{AB} + \vec{OA} = \vec{BD} + \vec{DC} + \vec{CO} = \vec{BO}$
- 4) $\vec{OC} - \vec{FC} = \vec{OC} + \vec{CF} = \vec{OF}$
- 5) $\vec{DO} + \vec{BC} + \vec{AE} = \vec{DO} + \vec{AE} + \vec{BC} = \vec{DO} + \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{DC}$
- 6) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Exercice 6 (Somme de vecteurs et relation de Chasles)



Sur la figure ci-dessus, formée de parallélogrammes juxtaposés, déterminer un représentant de :

- | | |
|--------------------------|-------------------------------------------------|
| 1) $\vec{AD} + \vec{CF}$ | 8) $\vec{IF} - \vec{FJ}$ |
| 2) $\vec{GC} + \vec{AC}$ | 9) $\vec{AI} + \vec{AE} + \vec{FJ}$ |
| 3) $\vec{HE} + \vec{BC}$ | 10) $\vec{AF} + \vec{HD} + \vec{BD}$ |
| 4) $\vec{DE} - \vec{DH}$ | 11) $\vec{JE} + \vec{FG} - \vec{ID}$ |
| 5) $\vec{GJ} + \vec{BF}$ | 12) $\vec{GJ} - \vec{DA} + \vec{BI}$ |
| 6) $\vec{DI} + \vec{JI}$ | 13) $\vec{FD} + \vec{IA} + \vec{CG} - \vec{FH}$ |
| 7) $\vec{FG} - \vec{AI}$ | 14) $\vec{ED} + \vec{AH} + \vec{CF} - \vec{FH}$ |

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\vec{AD} + \vec{CF} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$ | 9) $\vec{AI} + \vec{AE} + \vec{FJ} = \vec{AI} + \vec{IJ} + \vec{JH} = \vec{AH}$ |
| 2) $\vec{GC} + \vec{AC} = \vec{EA} + \vec{AC} = \vec{EC}$ | 10) $\vec{AF} + \vec{HD} + \vec{BD} = \vec{AF} + \vec{FB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ |
| 3) $\vec{HE} + \vec{BC} = \vec{HE} + \vec{EH} = \vec{HH} = \vec{0}$ | 11) $\vec{JE} + \vec{FG} - \vec{ID} = \vec{JE} + \vec{FG} + \vec{DI} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DI} = \vec{II} = \vec{0}$ |
| 4) $\vec{DE} - \vec{DH} = \vec{DE} + \vec{HD} = \vec{DE} + \vec{EA} = \vec{DA}$ | 12) $\vec{GJ} - \vec{DA} + \vec{BI} = \vec{BI} + \vec{GJ} + \vec{AD} = \vec{BI} + \vec{IA} + \vec{AD} = \vec{BD}$ |
| 5) $\vec{GJ} + \vec{BF} = \vec{IA} + \vec{AE} = \vec{IE}$ | 13) $\vec{FD} + \vec{IA} + \vec{CG} - \vec{FH} = \vec{HF} + \vec{FD} + \vec{CG} + \vec{IA} = \vec{HD} + \vec{CG} + \vec{IA} = \vec{IA}$ |
| 6) $\vec{DI} + \vec{JI} = \vec{HI} + \vec{JI} = \vec{HI}$ | 14) $\vec{ED} + \vec{AH} + \vec{CF} - \vec{FH} = \vec{ED} + \vec{AH} + \vec{CF} + \vec{HF} = \vec{ED} + \vec{AH} + \vec{DE} + \vec{HF} = \vec{AF}$ |
| 7) $\vec{FG} - \vec{AI} = \vec{FG} + \vec{IA} = \vec{FG} + \vec{GJ} = \vec{FJ}$ | |
| 8) $\vec{IF} - \vec{FJ} = \vec{IF} + \vec{JF} = \vec{DJ} + \vec{JF} = \vec{DF}$ | |

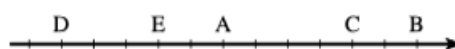
Exercice 7 (Somme de vecteurs et relation de Chasles sans schéma)

Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles :

- | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$ |
| 2) $\vec{BC} - \vec{BA} + \vec{BD} - \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ |
| 3) $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{AB} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ |
| 4) $\vec{AC} + 2\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$ |
| 5) $2\vec{AB} - \vec{BC} - \vec{CA} = \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{AB} + \vec{AB} = 3\vec{AB}$ |

Exercice 8 (Multiplication par un réel)

Les points A, B, C, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous. Dans chaque cas, trouver le nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$



- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\vec{v} = \vec{AB}$ et $\vec{u} = \vec{AE}$ $\vec{v} = -3\vec{u}$ | 3) $\vec{v} = \vec{EC}$ et $\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = \vec{u}$ |
| 2) $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{u} = \vec{AE}$ $\vec{v} = \frac{2}{5}\vec{u}$ | 4) $\vec{v} = \vec{CD}$ et $\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ |

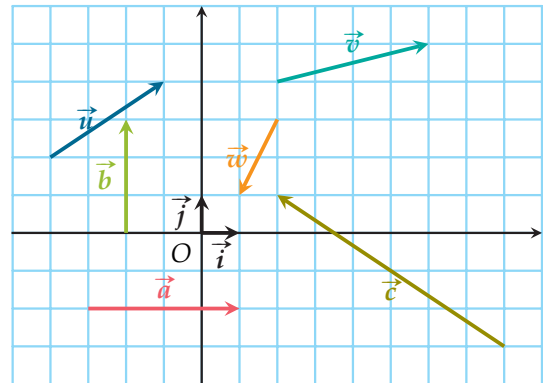
III. Coordonnées de vecteurs

Exercice 9

Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v}$ et \vec{w} dans ce repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



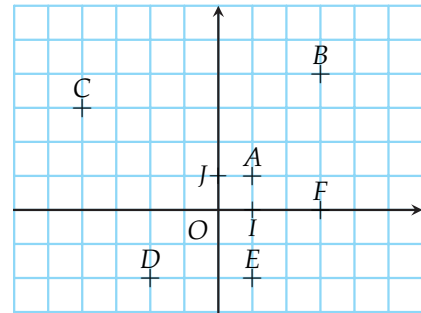
Exercice 10

Lire les coordonnées des vecteurs suivants.

- 1) \vec{AB} 3) \vec{CA} 5) \vec{AE}
 2) \vec{AC} 4) \vec{DE} 6) \vec{AF}

$$1) \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3) \vec{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 5) \vec{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$2) \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 4) \vec{DE} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 6) \vec{AF} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



IV. Calcul des coordonnées de vecteurs

Exercice 11

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $E(-4; 3), F(2; -5), G(-4; 1)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{EF}, \vec{FG} et \vec{EG}

On a $\vec{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$, c'est à dire $\vec{EF} \begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ -5 - 3 \end{pmatrix}$ soit $\vec{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, De même on obtient $\vec{FG} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{EG} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- 2) Retrouver les coordonnées de $M(x; y)$ telles que $\vec{EM} = \vec{u}$.

On recherche $M(x; y)$ tel que $\vec{EM} = \vec{u}$. En passant aux coordonnées on obtient l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} x - (-4) \\ y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Au final on obtient alors $M(1; 0)$.

Exercice 12

On considère quatre points $F(4; -2), G(-2; 5), H(3; -4)$ et $K(7; -5)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{FG}, \vec{GH}, \vec{HK}$ et \vec{KF} .

$x_{\vec{FG}} = x_G - x_F = -2 - 4 = -6$ et $y_{\vec{FG}} = y_G - y_F = 5 + 2 = 7$ donc $\vec{FG} \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$x_{\overrightarrow{GH}} = x_H - x_G = 3 + 2 = 5 \text{ et } y_{\overrightarrow{GH}} = y_H - y_G = -4 - 5 = -9 \text{ donc } \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$x_{\overrightarrow{HK}} = x_K - x_H = 7 - 3 = 4 \text{ et } y_{\overrightarrow{HK}} = y_K - y_H = -5 + 4 = -1 \text{ donc } \overrightarrow{HK} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et enfin } x_{\overrightarrow{KF}} = x_F - x_K = 4 - 7 = -3 \text{ et } y_{\overrightarrow{KF}} = y_F - y_K = -2 + 5 = 3 \text{ donc } \overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 2) Déterminer de deux façons différentes les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$.

1re méthode :

$$\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FH} \text{ et on a } x_{\overrightarrow{FH}} = x_H - x_F = 3 - 4 = -1 \text{ et } y_{\overrightarrow{FH}} = y_H - y_F = -4 + 2 = -2.$$

$$\text{On obtient } \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2ème méthode :

$$x_{\overrightarrow{FG}} + x_{\overrightarrow{GH}} = -6 + 5 = -1 \text{ et } y_{\overrightarrow{FG}} + y_{\overrightarrow{GH}} = 7 - 9 = -2. \text{ On obtient les coordonnées } \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} dans chacun des cas suivants :

1) $A \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{9} \right)$ et $B \left(1; -\frac{8}{9} \right)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ -\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{9}{9} \end{pmatrix}$$

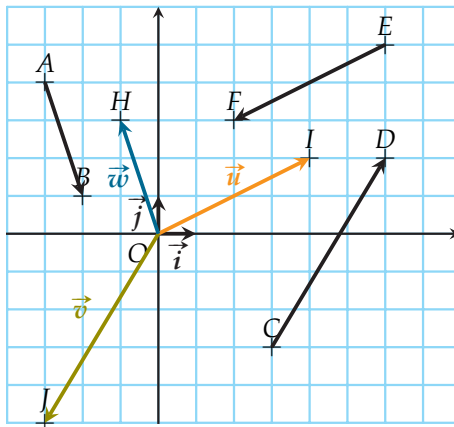
2) $A(-0,6; 1,1)$ et $B(0,6; 0,7)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0,6 - (-0,6) \\ 0,7 - 1,1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1,2 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

V. Opérations sur les vecteurs

Exercice 14

On considère les points et les vecteurs suivants dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



- 1) Calculer les coordonnées de \vec{u} telles que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Construire le point I tel que $\vec{OI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x_{AB} + x_{CD} \\ y_{AB} + y_{CD} \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ -3 + 5 \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 2) Calculer les coordonnées de \vec{v} telles que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$. Construire le point J tel que $\vec{OJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x_{AB} + x_{EF} \\ y_{AB} + y_{EF} \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} 1 + (-4) \\ -3 + (-2) \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- 3) Calculer les coordonnées de \vec{w} telles que $\vec{w} = \vec{CD} + \vec{EF}$. Construire le point H tel que $\vec{OH} = \vec{CD} + \vec{EF}$.

$$\vec{w} \begin{pmatrix} x_{CD} + x_{EF} \\ y_{CD} + y_{EF} \end{pmatrix} = \vec{w} \begin{pmatrix} 3 + (-4) \\ 5 + (-2) \end{pmatrix} = \vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 15

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Calculer les coordonnées des vecteurs $2\vec{u}$, $-5\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$ et $-\frac{2}{3}\vec{u}$.

$$2\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \quad -5\vec{u} \begin{pmatrix} -25 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{4}{2} \end{pmatrix} \quad -\frac{2}{3}\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B et C respectivement de coordonnées (1;4), (4;6) et (2;3).

- 1) Quelles sont les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme ?

Pour que ABCD soit un parallélogramme on doit avoir $\vec{CD} = \vec{BA}$.

$$\vec{CD} \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \iff x_D - 2 = -3 \text{ et } y_D - 3 = -2.$$

Donc $D(-1;1)$.

- 2) Prouver que ABCD est aussi un losange.

On prouve que 2 côtés consécutifs ont la même longueur.

$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ et $BC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ On a donc $AB=BC$. Le parallélogramme ABCD est donc aussi un losange.

