Chapitre 05 - Fonction trigonométriques
Correction des exercices

Exercices obligatoires

Exercice 1
résoudre l'équation donnée dans l'intervalle I.

1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
2) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$.
3) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$.
4) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$.
5) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\mathrm{I} = [0; 2\pi[$.
6) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ avec $\mathrm{I} =]-\pi; \pi]$.
7) $\cos(x) = 0$ avec $\mathrm{I} =]-\pi; \pi]$.
8) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ avec $\mathrm{I} =]-\pi; \pi]$.
9) $\sin(x) = 0$ avec $I =]-\pi; \pi]$.
10) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\mathrm{I} = [0; 4\pi[$.

Exercice 2 - Cet exercice utilise des notions d'autres chapitres.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2X^2 - 3X + 1 = 0$
   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $\cos^2(x) + \sqrt{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$.
   b) $\sin^2(x) - \cos^2(x) = 0$.

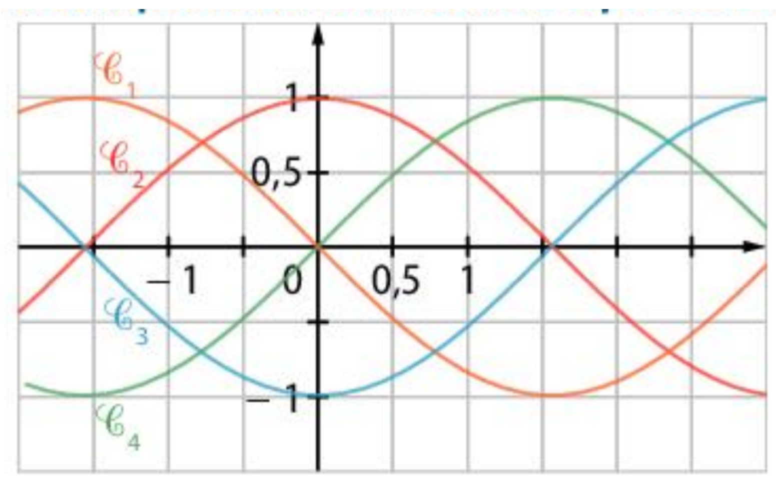
Exercice 3
Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ proposées, étudier sa parité et démontrer qu'elle est T - périodique.

1) $f(x) = 3 + 2\cos(x)$; $\mathrm{T} = 2\pi$.
2) $g(x) = \sin^2(x)$; $\mathrm{T} = \pi$.
3) $h(x) = |\sin(x)|$; $\mathrm{T} = \pi$.
4) $p(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$; $\mathrm{T} = \pi$.

Exercice 4
Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = x\cos(x)$
2) $g(x) = x\sin(x)$
3) $h(x) = x^2\cos(x)$
4) $p(x) = x\sin^2(x)$

Pour les exercices 5 à 8 , on considère les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 données dans le repère ci-dessous. Associer chaque fonction à sa courbe représentative.



Exercice 5
$f(x) = \sin(x)$; $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $h(x) = \sin(x + \pi)$.

Exercice 6
$f(x) = \cos(x)$; $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $h(x) = \cos(x + \pi)$

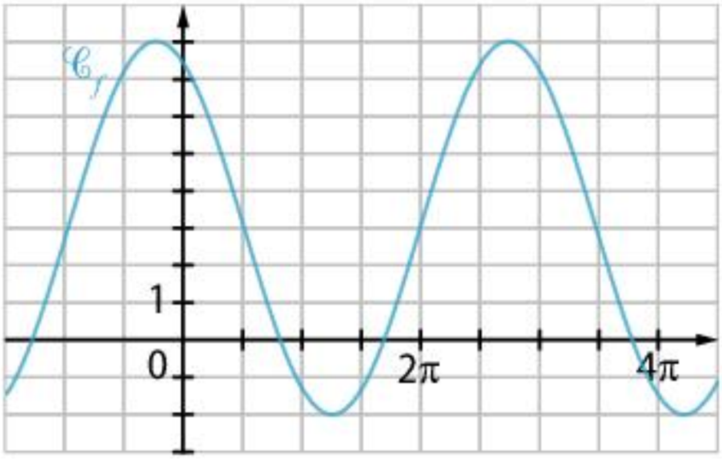
Exercice 7
$f(x) = \sin(\pi - x)$; $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $h(x) = \cos(-x)$.

Exercice 8
$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $g(x) = \cos(\pi - x)$; $h(x) = \sin(-x)$.

Exercice 9
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - 5\sin\left(\frac{2x - \pi}{3}\right)$$

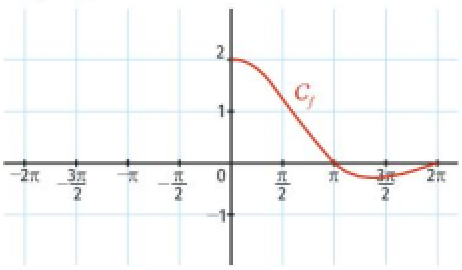
On donne ci-dessous une partie de sa représentation graphique.



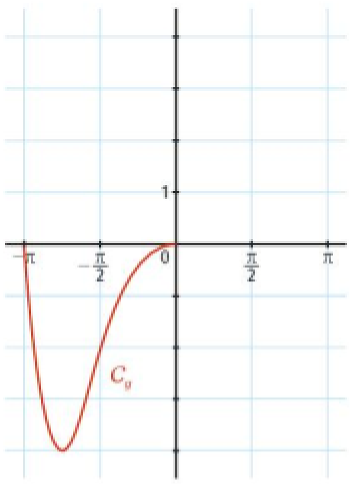
1) On admet que 3 a exactement deux antécédents par f dans l'intervalle $[0; 3\pi]$.
   a) À l'aide du graphique, conjecturer les valeurs exactes de ces antécédents.
   b) Montrer par le calcul que ces valeurs conviennent.
2) Démontrer que la fonction f est 3π-périodique.
3) En déduire l'ensemble des antécédents de 3 par f dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Sachant que la fonction f est une fonction paire, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur$[-2\pi; 2\pi]$.

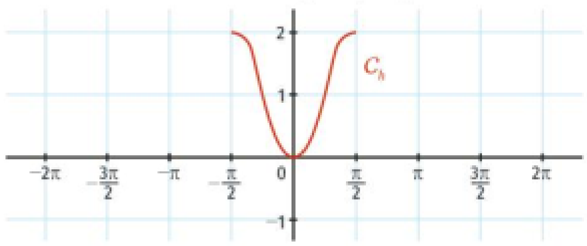


Exercice 11
Sachant que la fonction g est une fonction impaire, recopier et compléter le graphe ci-dessous à main levée sur$[-\pi; \pi]$.



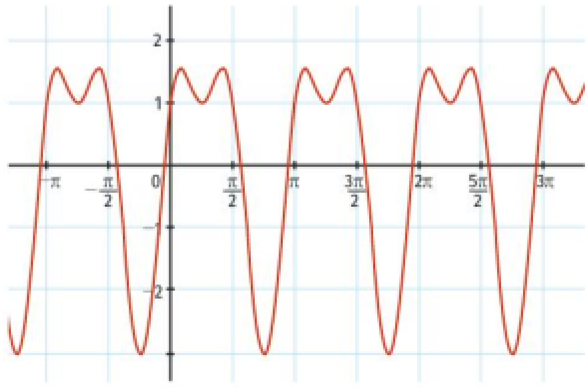
Exercice 12

Sachant que la fonction h est une fonction π-périodique, recopier et complèter le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.



Exercice 13

Déterminer graphiquement la période de la fonction f dont on fournit la courbe représentative.



Exercices facultatifs

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = \cos(x) + x^2$.

1) Montrer que f est une fonction paire.

$f(-x) = \cos(-x) + (-x)^2 = \cos(x) + x^2 = f(x)$.
On a bien $f(-x) = f(x)$ donc la fonction f est paire.

2) Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

La courbe représentative de f a une symétrie d'axe l'axe des ordonnées.

Exercice 15

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \sin(x)$.

1) Montrer que g est une fonction impaire.

$g(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin(x) = -g(x)$.
On a bien $g(-x) = -g(x)$ donc la fonction g est impaire.

2) Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de g ?

La courbe représentative de g a une symétrie centrale avec l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice 16

En exprimant, pour tout réel x, $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$, dire si les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ci-dessous sont paires ou impaires.

1) $f : x \mapsto x \times \sin(x)$

$f(-x) = -x \times \sin(-x) = -x \times (-\sin(x)) = x \times \sin(x) = f(x)$
La fonction est paire.

2) $f : x \mapsto x \times \cos(x)$

$f(-x) = -x \times \cos(-x) = -x \times (\cos(x)) = -f(x)$
La fonction est impaire.

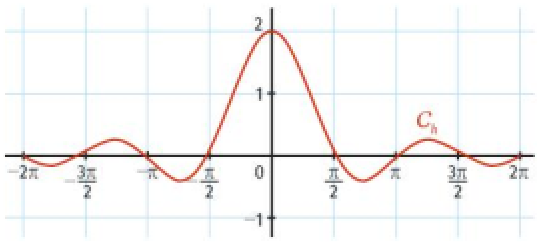
3) $f : x \mapsto (\sin(x))^2$

$f(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin(x))^2 = (\sin(x))^2 = f(x)$
La fonction est paire.

4) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2+\cos(x)}$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{2+\cos(-x)} = \dfrac{x^2}{2+\cos(x)} = f(x)$
La fonction est paire.

Exercice 17
La fonction h dont la représentation graphique est fournie semble-t-elle paire ? impaire ? périodique ?

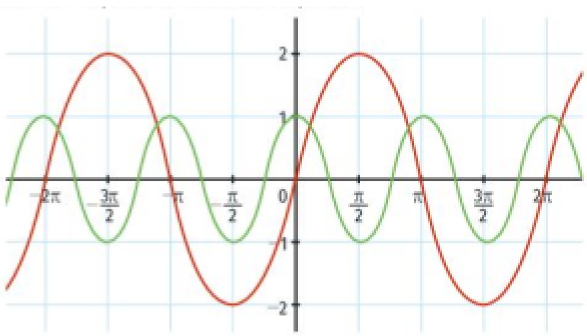


La fonction h semble paire (symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) mais pas périodique.

Exercice 18
Donner à chaque courbe représentative la fonction qui lui correspond. Justifier la réponse.

1) $f : x \mapsto 2\sin(x)$

2) $g : x \mapsto \cos(2x)$



On a $f(0) = 2\sin(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$
La courbe qui représente la fonction f passe par le point de coordonnée $(0;0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2};2\right)$. Il s'agit de la courbe rouge.
De même, on a $g(0) = \cos(2\times 0) = 1$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\times\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$
La courbe qui représente la fonction f passe par le point de coordonnée $(0;0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2};-1\right)$. Il s'agit de la courbe verte.

Exercice 19
Dans chacun des cas suivants, déterminer, s'il existe, un nombre réel x vérifiant les conditions données. On pourra s'aider du cercle trigonométrique.

1) $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

a) $x \in [0;\pi[$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle
$]-\pi;\pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).
L'équation $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ a pour solution :
$$\begin{cases} x_1 &= -\dfrac{3\pi}{4} \\ x_2 &= \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$
x_2 est la seule solution dans l'intervalle $[0;\pi[$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

b) $x \in \left]-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle
$]-\pi;\pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).
L'équation $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ a pour solution :
$$\begin{cases} x_1 &= -\dfrac{3\pi}{4} \\ x_2 &= \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$
x_1 est la seule solution dans l'intervalle $\left]-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{-\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

2) $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$

a) $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle
$]-\pi;\pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).
L'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ a pour solution :
$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} \\ x_2 &= \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$
x_2 est la seule solution dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{\dfrac{5\pi}{6}\right\}$

b) $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle
$]-\pi;\pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).
L'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ a pour solution :
$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} \\ x_2 &= \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$
x_1 est la seule solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ On peut maintenant conclure : $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}\right\}$

3) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

a) $x \in [\pi;2\pi]$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle
$]-\pi;\pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).
L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

On en déduit les solutions sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution ($k \in \mathbb{Z}$) :

$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

On teste différentes valeurs de k pour trouver les valeurs qui appartiennent à l'intervalle souhaité $[\pi; 2\pi]$ (ou $\left[\dfrac{6\pi}{6}; \dfrac{12\pi}{6}\right]$)

$k = 1 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6} \notin \left[\dfrac{6\pi}{6}; \dfrac{12\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6} \in \left[\dfrac{6\pi}{6}; \dfrac{12\pi}{6}\right] \end{cases}$

On peut maintenant conclure : $S = \left\{\dfrac{11\pi}{6}\right\}$

b) $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

On commence par étudier la solution dans l'intervalle
$]-\pi; \pi]$ (parmi les mesures principales de l'angle).

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

On en déduit les solutions sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution ($k \in \mathbb{Z}$) :

$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

On teste différentes valeurs de k pour trouver les valeurs qui appartiennent à l'intervalle souhaité $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (ou $\left[\dfrac{3\pi}{6}; \dfrac{9\pi}{6}\right]$)

$k = 1 \quad \begin{cases} x_1 &= \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6} \notin \left[\dfrac{3\pi}{6}; \dfrac{9\pi}{6}\right] \\ x_2 &= -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6} \notin \left[\dfrac{3\pi}{6}; \dfrac{9\pi}{6}\right] \end{cases}$

On peut maintenant conclure : $S = \varnothing$

4) $\cos(x) = 3$ avec $x \in [0; 2\pi]$

$S = \varnothing$ car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$