Chapitre 5

Expressions algébriques

I. Développer et factoriser

1) Développer

Définition

Développer une expression consiste à transformer un **produit** en une **somme** (ou une différence).

Propriété

Pour tous nombres réels k, a, b, c et d on a :

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Méthode

Quand une parenthèse est précédée d'un signe moins, on développe en multipliant par -1, c'est à dire que l'on change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse. Sinon on ne change rien.

Exemple :

Simplifier :
$A = (-6x-4) - (5x-4)$
$A = -6x - 4 - 5x + 4 = -11x$

Développer :
$B = (4x-5)(7-3x)$
$B = 4x \times 7 - 3x \times 4x - 5 \times 7 + 5 \times 3x$
$B = -12x^2 + 43x - 35$

2) Identités remarquable

Propriété

Identités remarquables : Pour tous nombres réels a et b on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple : Factoriser les expressions P et Q ci-dessous.

$P = (x-3)^2 - 49$
$P = (x-3)^2 - 7^2$
$P = ((x-3)-7)((x-3)+7)$
$P = (x-10)(x+4)$

$Q = (x+1)^2 - (3-x)^2$
$Q = \Big((x+1)-(3-x)\Big)\Big((x+1)+(3-x)\Big)$
$Q = (2x-2)\times 4$
$Q = 4(2x-2)$
$Q = 4\times 2(x-1)$
$Q = 8(x-1)$

3) Factoriser

Définition

Factoriser, c'est transformer une **somme (ou une différence)** en un **produit**.

Exemple : $3x+3y = 3\times(x+y) = 3(x+y)$

Remarque Devant une parenthèse, on fait souvent disparaître le signe $\times$

Méthode - Factoriser

$A = (2x+3)(4x+1) - (2x+3)(x+2)$

$A = (2x+3)[......$

$A = (2x+3)[(4x+1).........$

$A = (2x+3)[(4x+1) - ....$

$A = (2x+3)[(4x+1)-(x+2)]$

1) Repérer le facteur commun
Le facteur commun est $(2x+3)$
2) L'écrire devant et ouvrir un crochet
3) Se poser la question "Dans le premier terme par quoi est multiplié $(2x+3)$". L'écrire dans le crochet.
4) Recopier le signe "-" ou "+" qui séparait les deux termes.
5) Se poser la question "Dans le second terme par quoi est multiplié $(2x+3)$" . L'écrire dans le crochet et fermer le crochet.

Exemple : Factoriser $B = (x-1)(3x+4)-(x-1)(x+3)$

$B = (x-1)(3x+4)-(x-1)(x+3)$
$B = (x-1)[(3x+4)-(x+3)]$
$B = (x-1)[3x+4-x-3]$
$B = (x-1)(2x+1)$

II. Résolution d'équations

1) Équations du premier degré

a) propriété de la balance

Propriétés

On ne change pas une égalité en faisant une addition , soustraction, multiplication ou division par un même nombre. Autrement dit; pour trois nombres relatifs a, b et c (avec $c \neq 0$ pour la division), si $a = b$, alors :

1) $a+c = b+c$ **2)** $a-c = b-c$ **3)** $a\times c = b\times c$ **4)** $a\div c = b\div c$

b) Méthode de résolution

Il faut procéder par étapes. On va résoudre l'équation $2(7-2x) = x+5$

$2(7-2x) = x+5$ $14-4x = x+5$	**Etape 1** : on enlève les parenthèses(en développant).
$14-4x+4x = x+5+4x$ $14 = 5x+5$ $14-5 = 5x+5-5$ $9 = 5x$	**Etape 2** : on regroupe toutes les inconnues d'un côté du "=" et tous les nombres de l'autre côté du "=" en utilisant les propriétés de la balance 1 et 2.
$5x = 9$ $\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ $x = \frac{9}{5}$	A ce stade, il ne doit rester qu'une $\times$ ou une $\div$! **Etape 3** : si nécessaire, on utilise la propriété de la balance 3 ou 4 pour arriver à quelque chose de la forme "$x = ...$"
$\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ $x = \frac{9}{5}$	**Etape 4** : On teste l'égalité de départ pour la solution trouvée (ici, $x = \frac{9}{5}$) : si on trouve le même résultat, c'est que la solution est correcte !
Cette équation admet une solution : $\frac{9}{5}$	**Etape 5** : on écrit la conclusion.

Remarques

- Il peut être utile d'utiliser en premier la propriété pour supprimer un quotient : $\frac{7+12+9+x}{4} = 10$.
- Il ne doit rester plus qu'un seul nombre de chaque famille à la fin de l'étape 3.

2) Équation à produit nul

Propriété

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

Méthode - Se ramener à une équation produit nul

- On écrit tous les termes à gauche de l'équation
- On FACTORISE → soit grâce à un facteur commun
  → soit grâce à un identité remarquable
- On applique le produit nul.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$(7+x)(5x-3)-2x(7+x)=0$
$\iff (7+x)[(5x-3)-2x]$
$\iff (7+x)(3x-3)$
Si $a\times b=0$, alors $a=0$ ou $b=0$
$\iff 7+x=0$ ou $3x-3=0$
$\iff x=-7$ ou $x=1$
$S=\{-7;1\}$

$(2x-1)^2-25=0$
$\iff (2x-1-5)(2x-1+5)=0$
$\iff (2x-6)(2x+4)=0$
Si $a\times b=0$, alors $a=0$ ou $b=0$
$\iff 2x-6=0$ ou $2x+4=0$
$\iff 2x=6$ ou $2x=-4$
$\iff x=3$ ou $x=-2$
$S=\{-2;3\}$

3) Équation à quotient nul

Propriété

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul **ET son dénominateur ne l'est pas**

Méthode - Résoudre une équation quotient nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{7+x}{2x+6}-2=0$

1) On détermine la valeur interdite :
L'expression $\dfrac{7+x}{2x+6}-2$ **n'est pas définie** si $2x+6=0$ soit $2x=-6$ donc $x=-3$
La valeur interdite est -3 . Il faut donc que $x\neq-3$

2) On transforme l'expression pour avoir une seule fraction en mettant au même dénominateur :
$\dfrac{7+x}{2x+6}-2=0 \iff \dfrac{7+x-2(2x+6)}{2x+6}=0 \iff \dfrac{-3x-5}{2x+6}=0$

3) On résout « *numérateur = 0* »
$-3x-5=0 \iff -3x=5 \iff x=-\dfrac{5}{3}$

4) On conclut en vérifiant bien que les solutions ne soient pas des valeurs interdites
$S=\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$