Correction - Exercices obligatoires
Dérivation

Nombre dérivé

Exercice 1
Soit h un nombre réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1) Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.

2) Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.

3) À l'aide de la fonction dédiée de la calculatrice, contrôler le résultat du calcul précédent.

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 5$ et h un nombre réel.

1) Calculer $f(-2)$ et $f(-2+h)$, puis montrer que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$.

2) À l'aide de la fonction dédiée de la calculatrice, contrôler le résultat du calcul précédent.

Exercice 3
Dans chaque cas, montrer que la fonction f est dérivable en a et calculer $f'(a)$:

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $a = -1$;

$f(-1) = \dfrac{1}{-1-1} = -\dfrac{1}{2}$

$f(-1+h) = \dfrac{1}{-1+h-1} = \dfrac{1}{-2+h}$

$f(-1+h) - f(-1) = \dfrac{1}{-2+h} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2+(-2+h)}{2(-2+h)} = \dfrac{h}{2(-2+h)}$

$\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{h}{2(-2+h)} \times \dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2(-2+h)}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2(-2+h)} = -\dfrac{1}{4}$

$-\dfrac{1}{4}$ est un nombre réel donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -\dfrac{1}{4}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$ et $a = 1$;

$f(1) = \dfrac{2}{1^2} = 2$

$f(1+h) = \dfrac{2}{(1+h)^2} = \dfrac{2}{1+2h+h^2}$

$f(1+h) - f(1) = \dfrac{2}{1+2h+h^2} - 2 = \dfrac{2-2(1+2h+h^2)}{1+2h+h^2} = \dfrac{-2h^2-4h}{1+2h+h^2}$

$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{-2h^2-4h}{1+2h+h^2} \times \dfrac{1}{h} = \dfrac{-2h-4}{1+2h+h^2}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h-4}{1+2h+h^2} = -4$

-4 est un nombre réel donc f est dérivable en -1 et $f'(1) = -4$

3) $f : x \mapsto x^3$ et $a = 2$.

$f(2) = 2^3 = 8$

$f(2+h) = (2+h)^3 = (4+4h+h^2)(2+h) = 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3$
$f(2+h) = h^3+6h^2+12h+8$

$f(2+h)-f(2) = h^3+6h^2+12h+8-8 = h^3+6h^2+12h$

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{h^3+6h^2+12h}{h} = h^2+6h+12$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^2+6h+12 = 12$

12 est un nombre réel donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 12$

Equation réduite d'une tangente

Exercice 4
Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 3$ et $f'(2) = -2$. Soit C_f sa courbe représentative. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 .

on utilise la formule $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a = 2$, $f'(a) = f'(2) = -2$ et $f(a) = f(2) = 3$
$y = -2(x-2)+3 = -2x+4+3 = -2x+7$

Exercice 5
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-2x+1$ de courbe représentative C_f.

1) Vérifier par le calcul que $f'(-1) = -4$ et $f'(2) = 2$.

$\underline{\boldsymbol{f'(-1) = -4}}$

$f(-1) = (-1)^2-2\times(-1)+1 = 4$

$f(-1+h) = (-1+h)^2-2(-1+h)+1 = h^2-2h+1+2-2h+1 = h^2-4h+4$

$f(-1+h)-f(-1) = h^2-4h+4-4 = h^2-4h$

$\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{h^2-4h}{h} = h-4$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h-4 = -4$

-4 est un nombre réel donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -4$

$f'(2) = 2$

$f(2) = (2)^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$f(2+h) = (2+h)^2 - 2(2+h) + 1 = h^2 + 4h + 4 - 4 - 2h + 1 = h^2 + 2h + 1$

$f(2+h) - f(2) = h^2 + 2h + 1 - 1 = h^2 + 2h$

$\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h + 2 = 2$

2 est un nombre réel donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 2$

2) Déterminer l'équation réduite des tangentes à C_f aux points d'abscisses -1 et 2 .

Tangente en -1

on utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = -1$, $f'(a) = f'(-1) = -4$ et $f(a) = f(-1) = 4$
$y = -4(x+1) + 4 = -4x - 4 + 4 = -4x$

Tangente en 2

on utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 2$, $f'(a) = f'(2) = 2$ et $f(a) = f(2) = 1$
$y = 2(x-2) + 1 = 2x - 4 + 1 = 2x - 3$

3) Construire C_f, puis (T_{-1}) et (T_2).

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. Le point $A(4;-2)$ appartient à la courbe C_f. Sachant que la tangente T à la courbe C_f au point A passe par le point $J(0;1)$, déterminer $f'(4)$, puis l'équation de T.

$f'(4) = \dfrac{y_J - y_A}{x_J - x_A} = \dfrac{1 - (-2)}{0 - 4} = -\dfrac{3}{4}$

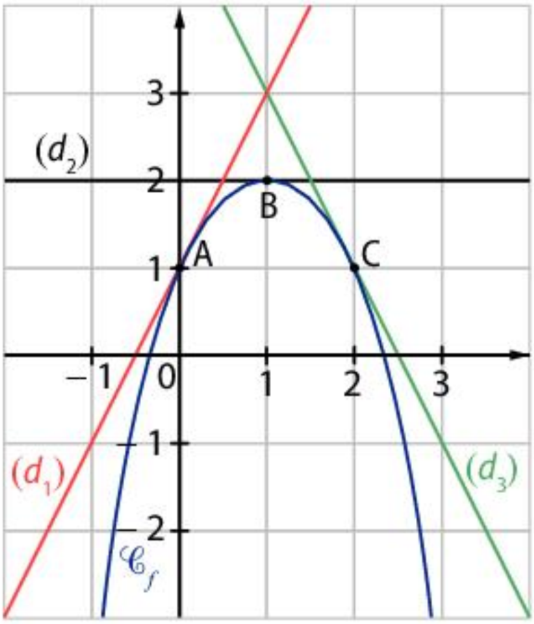
on utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 4$, $f'(a) = f'(4) = -\dfrac{3}{4}$ et $f(a) = f(4) = -2$

$y = -\dfrac{3}{4}(x-4) - 2 = -\dfrac{3}{4}x + 3 - 2 = -\dfrac{3}{4}x + 1$

Détermination graphique du nombre dérivé

Exercice 7

La courbe de la fonction f ainsi que ses tangentes en A, B et C sont représentées ci-dessous.



Lire la valeur des nombres dérivés de f en les abscisses respectives de A, B et C.

$f'(0) = \dfrac{2}{1} = 2$ $\qquad f'(1) = 0 \qquad$ $f'(2) = \dfrac{-2}{1} = -2$

Exercice 8

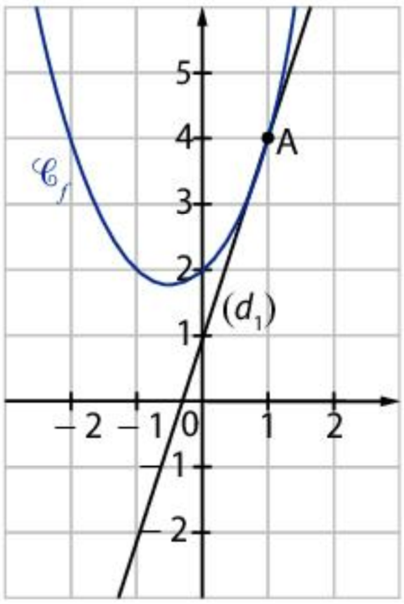
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et représentée ci-contre dans un repère. Le point A est le point de C_f d'abscisse 1 et (d_1) la tangente à C_f en A .

1) En utilisant la représentation graphique ci-contre, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

$f(1) = 4 \qquad f'(1) = \dfrac{3}{1} = 3$

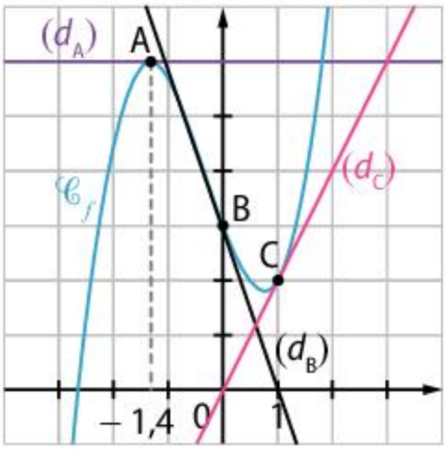
2) En déduire l'équation réduite de la tangente (d_1) à C_f en A .

on utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 1$, $f'(a) = f'(1) = 3$ et $f(a) = f(1) = 4$
$y = 3(x-1) + 4 = 3x - 3 + 4 = 3x + 1$



Exercice 9

La courbe de la fonction f ainsi que quelques-unes de ses tangentes sont représentées ci-dessous :



1) Lire la valeur des nombres suivants : $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$, $f'(1)$, $f(-1,4)$ et $f'(-1,4)$.

$f(0) = 3$ $\quad f'(0) = \dfrac{-3}{1} = -3$

$f(1) = 2$ $\quad f'(1) = \dfrac{2}{1} = 2$

$f(-1,4) = 6$ $\quad f'(-1,4) = 0$

2) Rédiger une méthode permettant de lire graphiquement $f(a)$ et $f'(a)$.

Fonctions dérivées

Exercice 10

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I, déterminer sa dérivée.

1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 3; \mathrm{I} = \mathbb{R}$

2) $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x; \mathrm{I} = \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4; \mathrm{I} = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sqrt{x} + x; \mathrm{I} = [0; +\infty[$

5) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}; \mathrm{I} = \mathbb{R}^*$

Exercice 11

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I, déterminer sa dérivée.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x^3 - 1\right); \mathrm{I} = \mathbb{R}^*$

2) $f(x) = x^2(\sqrt{x} + 1); \mathrm{I} = [0; +\infty[$

Exercice 12

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I, déterminer sa dérivée.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}; \mathrm{I} = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}; \mathrm{I} = \left]0; +\infty\right[$

Exercice 13

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I, déterminer sa dérivée.

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}; \mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}; \mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}; \mathrm{I} = \left]0;+\infty\right[$

Exercice 14

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I, déterminer sa dérivée.

1) $f(x) = (1-2x)^4; \mathrm{I} = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sqrt{2x+1}; \mathrm{I} = \left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$