Chapitre 7

Ensemble de nombres et arithmétique

I. Ensemble de nombres

1) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

Le premier entier naturel est 0 et un entier naturel n a pour successeur $n+1$. L'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; 10000; 10001; \dots\}$

Remarque N est l'initiale de "naturel".

2) L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

Les entiers relatifs sont des nombres entiers positifs ou négatifs.
$\mathbb{Z} = \{\dots; -10001; -10000; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; 10000; 10001; \dots\}$
En particulier, tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On écrit :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (lire $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ est contenu dans $\mathbb{Z}$).

Remarque $\mathbb{Z}$ est l'initiale de "Zahl" qui signifie nombre en allemand.

3) L'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux

Un décimal est un nombre qui admet :

- une écriture fractionnaire de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$
- une écriture décimale avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Tout entier relatif a est un décimal. En effet :
$a = \dfrac{a}{1} = \dfrac{a}{10^0}$. Donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Exemples : $-5 \in \mathbb{D}; 2,5 \in \mathbb{D}\ \left(2,5 = \frac{25}{10}\right); -\frac{3}{4} \in \mathbb{D} \left(-\dfrac{3}{4} = -0,75 = -\dfrac{75}{10^2}\right)$

Remarque $\mathbb{D}$ est l'initiale de "Décimal".

4) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels

Un rationnel est un nombre qui admet une écriture fractionnaire de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs, $b \neq 0$.
En particulier, tout décimal est un rationnel. Donc : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exemples : : $-5 \in \mathbb{Q}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ $\left(\text{mais } \frac{2}{3} = 0,6666\ldots \text{ donc } \frac{2}{3} \notin \mathbb{D} \right)$

Remarque "Rationnel" vient du latin "ratio" qui signifie "quotient". Qn est l'initiale de quotient.

Propriété

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

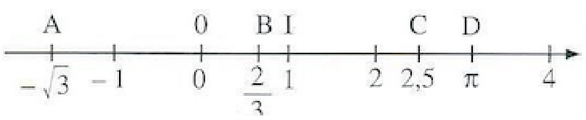
Démonstration

Pour montrer cette propriété, nous allons raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer une propriété vraie et montrer qu'on obtient une contradiction.
Supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Il existe donc un entier relatif a et un entier naturel n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Cela signifie donc, en utilisant les produits en croix, que $10^n = 3a$. $3a$ est un multiple de 3 . Par conséquent $10^n = 3a$ est également un multiple de 3 . Donc 3 divise 10 ce qui est absurde puisque les seuls diviseurs positifs de 10 sont $1, 2, 5$ et 10 . Cela signifie par conséquent que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

5) L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

L'ensemble des réels est formé de tous les nombres utilisés en classe de Seconde ; il contient les rationnels (donc $Q \subset \mathbb{R}$) et les irrationnels (ou non rationnels) tels que : $\sqrt{2}; \pi; \cos 23°; \ldots$ On représente usuellement l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels par une droite graduée :

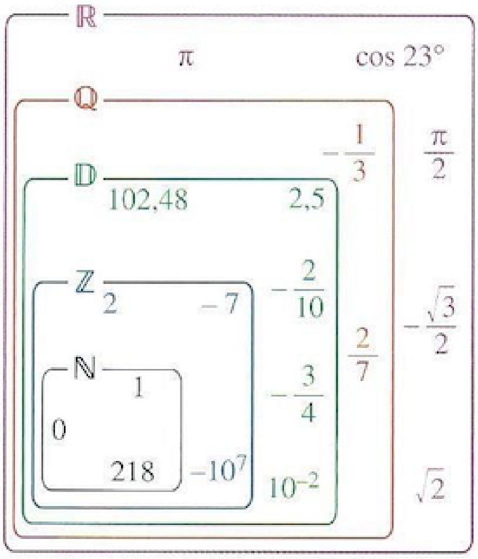
- tout point de cette droite a pour abscisse un réel ;
- tout réel est l'abscisse d'un point de cette droite.



Remarque $\mathbb{R}$ est l'initiale de "réel".

6) Synthèse

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



II. Multiples et diviseurs d'un nombre entier

Définition

On considère deux entiers relatifs a et b.
On dit que b est un **diviseur** de a s'il existe un entier relatif k tel que $a = b \times k$.
On dit alors que a est **divisible** par b ou que a est un multiple de b.

Exemples :

Exemples :

- $10 = 2 \times 5$ donc :
  - 10 est divisible par 2 ;
  - 10 est un multiple de 2 ; 2 est un diviseur de 10 .
- Les diviseurs de 6 sont $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ et 6
- 13 n'est pas un multiple de 5 car il n'existe pas d'entier relatif k tel que $13 = 5k$.
  En effet, si un tel nombre existait alors $k = \frac{13}{5} = 2,6$. Or 2,6 n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.

Propriété

On considère un entier relatif a.
La somme de deux multiples de a est également un multiple de a.

Démonstration

On considère deux entiers relatifs b et c multiples de a. Il existe donc deux entiers relatifs p et q tels que $b = a \times p$ et $c = a \times q$. Ainsi :

$$\begin{aligned} b+c &= a\times p + a\times q \\ &= a\times(p+q) \end{aligned}$$

$p+q$ est un entier relatif donc $b+c$ est un multiple de a.

Exemple : 14 et 28 sont deux multiples de 7 . En effet $14 = 7\times 2$ et $28 = 7\times 4$.
$14+28 = 42$ est également un multiple de 7 puisque $42 = 7\times 6$.

III. Nombres pairs et nombres impairs

Définition

On considère un entier relatif n.

- On dit que n est pair s'il est divisible par 2 .
- On dit que n est impair s'il n'est pas divisible par 2 .

Exemples :

- $0; 2; 4; 6; 8; \ldots$ sont des nombres pairs.
- $1; 3; 5; 7; 9; \ldots$ sont des nombres impairs

Propriété

On considère un entier relatif n

- n est pair si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$.
- n est impair si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k+1$.

Propriété

Si n est un entier relatif impair alors n^2 est également impair.

Démonstration

n est un entier relatif impair. Il existe donc un entier relatif k tel que $n = 2k+1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= (2k)^2 + 2\times 2k\times 1 + 1^2 \\ &= 4k^2 + 2k + 1 \\ &= 2\left(2k^2+k\right) + 1 \end{aligned}$$

Par conséquent n^2 est impair.

IV. Nombres premiers

Définition

Un entier naturel est dit premier s'il possède exactement deux diviseurs distincts (1 et lui-même).

Exemples :

- 1 n'est pas premier car il n'est divisible que par lui-même.
- $2, 3, 5, 7, 11, 13$ sont des nombres premiers.
- 6 n'est pas premier car il est divisible par $1, 2, 3$ et 6

Propriété

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de façon unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Remarque Si n est un nombre premier alors cette décomposition est réduite à lui-même.

Exemple : $150 = 15 \times 10 = 3 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$

Propriété

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 4 qui n'est pas un nombre premier.
Son plus petit diviseur différent de 1 est un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple : On souhaite déterminer le plus petit diviseur différent de 1 de 371 .
On a $\sqrt{371} \approx 19,3$.
Or les nombres premiers inférieurs ou égaux à 19 sont : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ et 19 .
On constate que 371 n'est pas divisible par 2,3 et 5 mais que $\dfrac{371}{7} = 53$.
Ainsi le plus petit diviseur différent de 1 de 371 est 7 .

V. Critères de divisibilité

Cette partie n'est absolument pas au programme de seconde mais il est parfois utile de connaître ces critères. Un nombre est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est pair,
  Exemple : 14, 2476 et 10548 sont divisibles par 2
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
  Exemple : 234 est divisible par 3 car $2 + 3 + 5 = 9$ est divisible par 3 .

- par 4, si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est un multiple de 4.
  Exemple : 2132 est divisible par 4 car 32 est divisible par 4.
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
  Exemple : 105 est divisible par 5.
- par 6 s'il est pair et divisible par 3 .
  Exemple : 14676 est divisible par 6 car il est pair et $1+4+6+7+6=24$ est divisible par 3 .
- par 7 si la valeur absolue de la différence entre son nombre de dizaine et le double de son chiffre des unités est divisible par 7.
  Exemple : 8645 est divisible par 7 car :
  $\mid 864-2\times 5 \mid \ = 854 \qquad \mid 85-2\times 4 \mid \ = 77$ qui est clairement divisible par 7 mais on pourrait continuer la méthode.
- par 8 si le nombre constitué de ses 3 derniers chiffres (unité, dizaine et centaine) est divisible par 8 .
  Exemple : 5104 est divisible par 8 car $104=8\times 13$ est divisible par 8 .
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9,
  Exemple : 4572 est divisible par 9 car $4+5+7+2=18$ qui est divisible par 9 .
- par 10, si son chiffre des unités est 0,
  Exemple : 13450 est divisible par 10.
- par 11 si la différence de la somme de ses chiffres de rang impair et de la somme de ses chiffres de rang pair est un multiple de 11 .
  Exemple : 381502 est divisible par 11 car $3+1+0-(8+5+2)=-11$ est un multiple de 11 .