Chapitre 8

Fonctions affines et linéaires

I. Définition et propriété

Définitions

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.
- Les nombres m et p sont respectivement appelés **le coefficient directeur** et **l'ordonnée à l'origine** de f.

Remarques - Cas particulier

Si f est une fonction affine telle que :

- $m = 0$, alors la fonction f est une fonction constante.
- $p = 0$, alors la fonction f est une fonction linéaire.

Propriété

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Le nombre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le **taux d'accroissement** de f entre a et b.

Conséquence

Soient f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et a et b deux réels distincts.
Alors, $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $p = f(a) - ma$.

Exemple : f est une fonction affine telle que $f(0) = -5$ et $f(1) = -2$.
Alors : $p = f(0) = -5$ et $m = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{-2 - (-5)}{1} = -2 + 5 = 3$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$

Méthode - déterminer si une fonction est affine

Énoncé : Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Justifier.

1) $f(x) = 2x - 3$

2) $g(x) = x^2 - 1$

Réponse :

1) Pour tout réel x, $f(x) = 2 \times x - 3$ donc f est affine avec $m = 2$ et $p = -3$.

2) Pour la fonction g, on a : $g(0) = -1$; $g(1) = 0$ et $g(2) = 3$.
$\dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \dfrac{3 - 0}{1} = 3$ et $\dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{0 - (-1)}{1} = 1$
Le taux d'accroissement n'est pas constant donc g n'est pas affine.

II. Représentation graphique

Propriété

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$, la courbe représentative d'une fonction f est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées si, et seulement si, f est une fonction affine.

Conséquence

Soit f une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Pour représenter f, il suffit de placer deux points A $(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ et B $(x_\mathrm{B}; y_\mathrm{B})$ avec $y_\mathrm{A} = mx_\mathrm{A} + p$ et $y_\mathrm{B} = mx_\mathrm{B} + p$ puis de tracer la droite passant par ces deux points.

Méthode - représenter une fonction affine

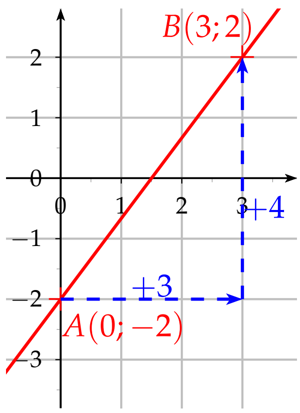
Énoncé :
Représenter dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$ la fonction affine h définie par $h(x) = \dfrac{4}{3}x - 2$.

Méthode :

- Pour placer les deux points A et B, on choisit deux abscisses x_A et x_B.
- On calcule les ordonnées $y_\mathrm{A} = mx_\mathrm{A} + p$ et $y_\mathrm{B} = mx_\mathrm{B} + p$.
- La droite (AB) est la courbe représentative de la fonction affine.

Réponse :

- On prend $x_\mathrm{A} = 0$ et $x_\mathrm{B} = 3$.
- On a donc $y_A = -2$ et $y_B = \dfrac{4}{3} \times 3 - 2 = 2$.
- on obtient :



III. Étude d'une fonction affine

1) Variation

Propriété

- Si $m > 0$, alors f est une fonction strictement croissante.
- Si $m < 0$, alors f est une fonction strictement décroissante.

Méthode - Utiliser les variations

Énoncé :
Soit $a \in [-3; -2]$ et g une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x - 5$.
Déterminer un encadrement de $g(a)$.
Méthode :

- On vérifie les variations de la fonction g.
- La fonction est décroissante donc deux nombres et leur image sont classés dans l'ordre inverse.

Réponse :
La fonction affine g est strictement décroissante car $m = -4$ et $-4 < 0$ donc :

$$-3 \leqslant a \leqslant -2 \Leftrightarrow g(-3) \geqslant g(a) \geqslant g(-2) \Leftrightarrow 7 \geqslant g(a) \geqslant 3$$

2) signes

Propriété

1) Si $m \neq 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{p}{m}$.
2) Si $m > 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{p}{m}$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) Si $m < 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{p}{m}$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Méthode - Dresser un tableau de signes

Énoncé :
Dresser le tableau de signes de la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -5x - 7$
Méthode :

- On vérifie les variations de h.
- On calcule la valeur qui annule h.
- On complète le tableau de signes à l'aide de 1 . et 2 .

Réponse :

h est strictement décroissante et $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{-7}{-5} = -\frac{7}{5}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Méthode - Résoudre une inéquation

Énoncé :

Résoudre l'inéquation $(3x+2)(-2x-1) \leqslant 0$.

Méthode :

- On détermine le signe de chaque facteur en utilisant la méthode précédente.
- On résume le signe du produit sur la dernière ligne.
- On donne l'ensemble des solutions.

Réponse :

$x \mapsto 3x+2$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $(3x+2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$.

$x \mapsto -2x-1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $-2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$.

En résumé

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $(3x+2)(-2x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{-2}{3}\right] \cup \left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$.