Exercices obligatoires
Chap. 10 – Fonction Exponentielles

Exercice 1 – Ex 45 p 172 du LS
f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2e^x$.
Vérifier que $f' = f$ et calculer $f(0)$.

Pour tout réel x, $f'(x) = -2 \times 1 \times e^x = f(x)$. De plus, $f(0) = -2e^0 = -2$.

Exercice 2 – Ex 46 p 172 du LS
Déterminer une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = \dfrac{3}{2}$.

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{3}{2}e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a de plus $g' = g$ et $g(0) = \frac{3}{2}e^0 = \frac{3}{2}$.

Exercice 3 – Ex 47 p 172 du LS
Déterminer une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h' = h$ et $h(0) = -4$.

La fonction $h : x \mapsto -4e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a de plus $h' = h$ et $h(0) = -4e^0 = -4$.

Exercice 4 – Ex 50 p 172 du LS
Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1) $A = e^2 \times e^{32} \times e^8$

$A = e^{2+32+8} = e^{42}$

2) $B = \dfrac{e}{e^5}$

$B = \frac{e^1}{e^5} = e^{1-5} = e^{-4}$

3) $C = \dfrac{(e^7)^3 \times e^4}{e^{-4}}$

$C = e^{7\times 3+4-(-4)} = e^{29}$

Exercice 5 – Ex 51 p 172 du LS
x est un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1) $a(x) = e^{2x} \times (e^x)^2 \times e^{-3x}$

$a(x) = e^{2x} \times e^{2x} \times e^{-3x} = e^{2x+2x+(-3x)} = e^x$

2) $b(x) = \dfrac{e^{x^2}}{e^x}$

$b(x) = e^{x^2-x}$

3) $c(x) = \dfrac{e^{x-1} \times e^{4x}}{e^x}$

$c(x) = e^{x-1+4x-x} = e^{4x-1}$

4) $d(x) = \dfrac{e^{-2x}}{e^{-3x} \times e^{x+1}}$

$d(x) = e^{-2x-(-3x+x+1)} = e^{-1}$

Exercice 6 – **Ex 56 p 173 du LS**
Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $A = e^4\left(e^3 + e^7\right)$

$A = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^7 = \mathrm{e}^{4+3} + \mathrm{e}^{4+7} = \mathrm{e}^7 + \mathrm{e}^{11}$

2) $B = \left(e^2 + e^6\right)\left(e^3 + e\right)$

$B = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^6 \times \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^6 \times \mathrm{e} = \mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^9 + \mathrm{e}^7$

3) $C = \left(e^8 - e^2\right)\left(e^6 + 1\right)$

$C = \mathrm{e}^8 \times \mathrm{e}^6 + \mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{14} + \mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^8 + \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{14} + \mathrm{e}^2$

4) $\mathrm{D} = \left(\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^3\right)\left(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^8\right)$

$D = \mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^8 + \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^8 = \mathrm{e}^{-4} - \mathrm{e}^6 + \mathrm{e} - \mathrm{e}^{11}$

Exercice 7 – **Ex 57 p 173 du LS**
Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^5\right)^2$

$A = \left(\mathrm{e}^3\right)^2 + 2 \times \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^5 + \left(\mathrm{e}^5\right)^2 = \mathrm{e}^6 + 2\mathrm{e}^8 + \mathrm{e}^{10}$

2) $\mathrm{B} = \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}\right)^2$

$B = \left(\mathrm{e}^2\right)^2 - 2 \times \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-2} + \left(\mathrm{e}^{-2}\right)^2 = \mathrm{e}^4 - 2 + \mathrm{e}^{-4}$

3) $\mathrm{C} = \left(\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^{-4}\right)\left(\mathrm{e}^6 + \mathrm{e}^{-4}\right)$

$C = \left(\mathrm{e}^6\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{-4}\right)^2 = \mathrm{e}^{12} - \mathrm{e}^{-8}$

4) $\mathrm{D} = \left(2\mathrm{e}^4 - 3\mathrm{e}^{-1}\right)^2$

$D = 4\mathrm{e}^8 - 2 \times 2\mathrm{e}^4 \times 3\mathrm{e}^{-1} + 9\mathrm{e}^{-2} = 4\mathrm{e}^8 - 12\mathrm{e}^3 + 9\mathrm{e}^{-2}$

Exercice 8 – **Ex 29 p 171 du LS**
x est un nombre réel. Simplifier les expressions.

1) $\mathrm{e}^{-2x+1} \times \mathrm{e}^{x+3}$

$\mathrm{e}^{-2x+1} \times \mathrm{e}^{x+3} = \mathrm{e}^{-2x+1+x+3} = \mathrm{e}^{-x+4}$

2) $\mathrm{e}^{x+4} \times \left(\mathrm{e}^x\right)^2 \times \mathrm{e}^{-2x}$

$\mathrm{e}^{x+4} \times \left(\mathrm{e}^x\right)^2 \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{x+4} \times \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{x+4+2x-2x} = \mathrm{e}^{x+4}$

3) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}$

$\mathrm{e}^x \times \mathrm{e} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{x+1}$

4) $\mathrm{e}^x \times x\mathrm{e}^x$

$\mathrm{e}^x \times x\mathrm{e}^x = x \times \mathrm{e}^{x+x} = x \times \mathrm{e}^{2x}$

Exercice 9 – **Ex 30 p 171 du LS**
x est un nombre réel. Simplifier les expressions.

1) $\dfrac{\mathrm{e}^x \times \left(\mathrm{e}^x\right)^2}{\mathrm{e}^{2x}}$

$$\frac{e^x \times (e^x)^2}{e^{2x}} = \frac{e^x \times e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{e^{x+2x}}{e^{2x}} = e^{3x-2x} = e^x$$

2) $\dfrac{e^{x+4}}{e^{4x}}$

$$\frac{e^{x+4}}{e^{4x}} = e^{x+4-4x} = e^{-3x+4}$$

3) $\dfrac{1}{e^{3-2x}}$

$$\frac{1}{e^{3-2x}} = e^{-(3-2x)} = e^{2x-3}$$

Exercice 10 — **Ex 31 p 171 du LS**
Déterminer le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 3e^x$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $3 > 0$ donc $f(x) > 0$.

2) $g(x) = 2e^{-5x}$

Pour tout réel x, $e^{-5x} > 0$ et $2 > 0$ donc $g(x) > 0$.

3) $h(x) = -\sqrt{2}e^{-3x}$

Pour tout réel x, $e^{-3x} > 0$ et $-\sqrt{2} < 0$, donc $h(x) < 0$.

Exercice 11 — **Ex 32 p 171 du LS**
Déterminer le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \dfrac{1+e^{4x}}{x^2+2}$

Pour tout réel x, $e^{4x} > 0$ donc le numérateur est strictement positif. De plus pour tout réel x, $x^2+2 > 0$. Donc, au final, f est positive.

2) $g(x) = \dfrac{-9}{-2-e^{-8x}}$

Pour tout réel x, $-e^{-8x} < 0$, donc le dénominateur est strictement négatif. Le numérateur étant lui aussi négatif, la fonction g est donc positive.

Exercice 12 — **Ex 33 p 171 du LS**
Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 3e^x - 5x^2 + 2$

$f'(x) = 3e^x - 5 \times 2x + 0 = 3e^x - 10x$.

2) $f(x) = x - 4e^x + 1$

$f'(x) = 1 - 4e^x + 0 = 1 - 4e^x$.

3) $f(x) = e^x + e^3$

$f'(x) = e^x + 0 = e^x$.

4) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$ (dérivée d'un produit).

Exercice 13 — **Ex 34 p 171 du LS**
Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et en déduire son tableau de variations.

1) $f(x) = e^{3x}$

$f'(x) = 3 \times e^{3x} = 3e^{3x}$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = -2 \times e^{-2x} = -2e^{-2x}$, f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = e^{-x+4}$

$f'(x) = -1 \times e^{-x+4} = -e^{-x+4}$, f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) $f(x) = 5e^{x+6}$

$f'(x) = 5 \times 1 \times e^{x+6} = 5e^{x+6}$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 — **Ex 35 p 171 du LS**
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $e^x = e^{-2}$

$e^x = e^{-2} \Leftrightarrow x = -2$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-2\}$.

2) $e^x = e$

$e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.

3) $e^{x+2} = e^3$

$e^{x+2} = e^3 \Leftrightarrow x+2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.

4) $e^{2x+1} = e$

$e^{2x+1} = e \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^1 \Leftrightarrow 2x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.

5) $e^x = 1$

$e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.

6) $e^x + 4 = 0$

$e^x + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = -4$ ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. L'équation n'admet aucune solution : $S = \varnothing$.

7) $e^{x^2} = e$

$e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$. Donc $S = \{-1; 1\}$.

8) $e^{x^2+1} = 1$

$e^{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+1} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible, donc $S = \varnothing$.

Exercice 15 — **Ex 36 p 171 du LS**
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $e^{-x} = 1$

$e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $e^{2x-3} = e$

$e^{2x-3} = e \Leftrightarrow e^{2x-3} = e^1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

3) $5e^{3x+1} = 5$

$5e^{3x+1} = 5 \Leftrightarrow e^{3x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{3x+1} = e^0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

4) $-2e^{x^2} = 3$

$-2e^{x^2} = 3 \Leftrightarrow e^{x^2} = -\frac{3}{2}$
Ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. L'équation n'admet aucune solution : $S = \varnothing$.

Exercice 16 – **Ex 37 p 171 du LS**
Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $e^{2x} > e^{-2}$

$e^{2x} > e^{-2} \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$ donc l'ensemble des solutions est $S =]-1; +\infty[$.

2) $e^{-3x} < e$

$e^{-3x} < e \Leftrightarrow e^{-3x} < e^1 \Leftrightarrow -3x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$
Donc $S = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$

3) $e^{3x-5} \geqslant e^{-3}$

$e^{3x-5} \geqslant e^{-3} \Leftrightarrow 3x - 5 \geqslant -3 \Leftrightarrow 3x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{2}{3}$
Donc $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

4) $e^{-2x-1} \leqslant 1$

$e^{-2x-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow e^{-2x-1} \leqslant e^0 \Leftrightarrow -2x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -2x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$
Donc $S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.