

Chapitre 4

Correction - Exercices d'entraînement

Notion de vecteur

I. Notion de vecteur

Exercice 1 (Vecteurs et translations)

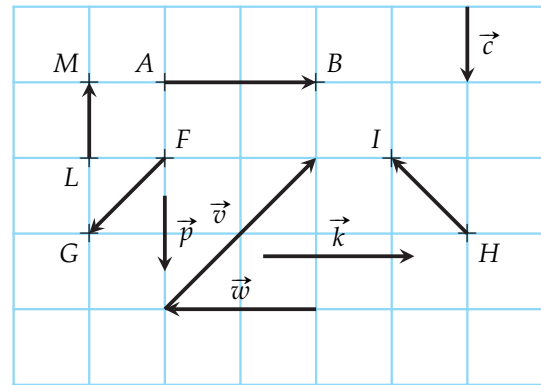
On considère les vecteurs ci-contre représentés sur un quadrillage.

- 1) Repérer les vecteurs égaux, les vecteurs opposés et les vecteurs de même norme.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{k}$ sont égaux. Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{c}$ le sont aussi.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{k}$ sont opposés. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{AB}$ aussi. Ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\vec{p}$ et les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\vec{c}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{FG}$ ont la même norme. Les vecteurs égaux et opposés précédemment cités ont aussi forcément la même norme.



- 2) Quelle est l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$?

L'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$ est A.

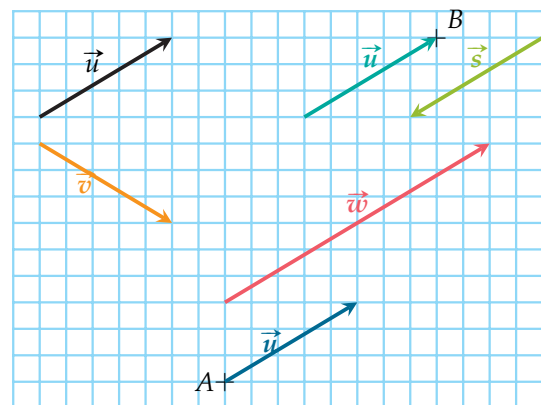
- 3) Par quelles translations le point A est-il l'image du point B?

A est l'image de B par la translation de vecteur $-\vec{k}$ (ou de vecteur $\vec{w}$).

Exercice 2 (Tracer des vecteurs)

Dans le quadrillage ci-contre :

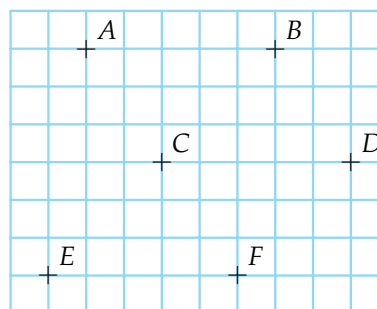
- Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine le point A.
- Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour extrémité le point B.
- Tracer un vecteur $\vec{v}$ de même longueur que $\vec{u}$ mais différent de $\vec{u}$.
- Tracer un vecteur $\vec{w}$ de même direction, de même sens que $\vec{u}$, mais différents de $\vec{u}$.
- Tracer un vecteur $\vec{s}$ de même direction et de même longueur que $\vec{u}$ mais différent de $\vec{u}$.



Exercice 3 (Vecteurs égaux et vecteurs opposés)

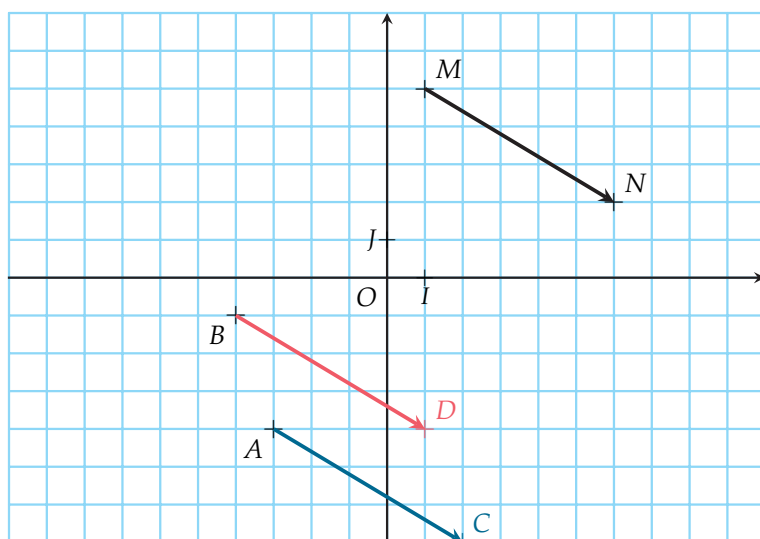
En utilisant le quadrillage, dire pour chaque égalité si elle est vraie ou si elle est fausse.

- 1) $\vec{AB} = \vec{EF}$ Vrai
- 2) $\vec{CD} = -\vec{AB}$ Faux
- 3) $\vec{DA} = \vec{DB}$ Faux
- 4) $\vec{ED} = \vec{BD}$ Faux
- 5) $\vec{AE} = \vec{BF}$ Vrai
- 6) $\vec{EF} = -\vec{DC}$ Vrai



II. Opérations sur les vecteurs

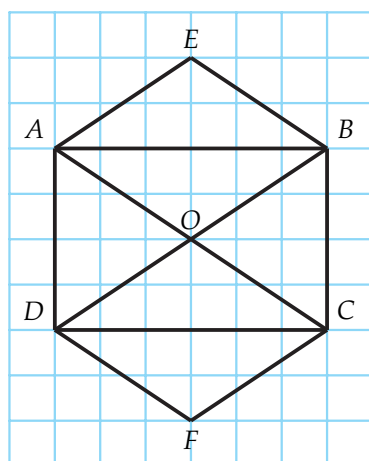
Exercice 4 (Règle du parallélogramme)



- 1) Tracer le point C image du point A par la translation de vecteur $\vec{MN}$
- 2) Tracer le point D image du point B par la translation de vecteur $\vec{MN}$.
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère ACDB? Justifier votre réponse.

On a $\vec{AC} = \vec{BD} = \vec{MN}$ donc d'après la règle du parallélogramme ACDB est un parallélogramme.

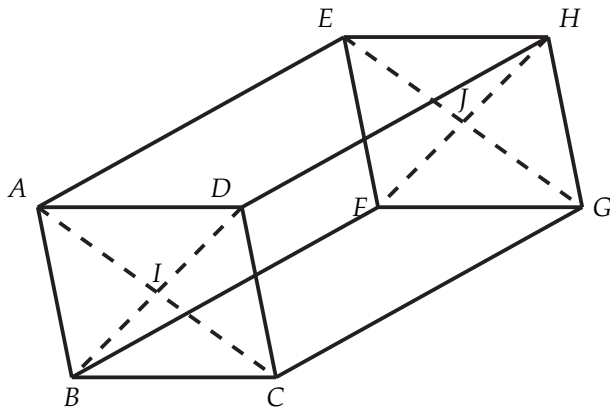
Exercice 5 (Somme de vecteurs)



Calculer les sommes vectorielles indiquées en utilisant la figure ci-contre :

- 1) $\vec{AE} + \vec{AO} = \vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB}$
- 2) $\vec{AE} + \vec{DF} = \vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB}$
- 3) $\vec{BD} - \vec{BA} - \vec{AO} = \vec{BD} + \vec{AB} + \vec{OA} = \vec{BD} + \vec{DC} + \vec{CO} = \vec{BO}$
- 4) $\vec{OC} - \vec{FC} = \vec{OC} + \vec{CF} = \vec{OF}$
- 5) $\vec{DO} + \vec{BC} + \vec{AE} = \vec{DO} + \vec{AE} + \vec{BC} = \vec{DO} + \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{DC}$
- 6) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Exercice 6 (Somme de vecteurs et relation de Chasles)



Sur la figure ci-dessus, formée de parallélogrammes juxtaposés, déterminer un représentant de :

- | | |
|--|---|
| 1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF}$ | 8) $\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{FJ}$ |
| 2) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AC}$ | 9) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$ |
| 3) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BC}$ | 10) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{BD}$ |
| 4) $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DH}$ | 11) $\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{ID}$ |
| 5) $\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BF}$ | 12) $\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BI}$ |
| 6) $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{JI}$ | 13) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{FH}$ |
| 7) $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{AI}$ | 14) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{FH}$ |

$$1) \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

$$2) \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EC}$$

$$3) \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{HH} = \vec{0}$$

$$4) \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DA}$$

$$5) \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IE}$$

$$6) \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{HI}$$

$$7) \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{FJ}$$

$$8) \overrightarrow{IF} - \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{JF} = \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JF} = \overrightarrow{DF}$$

$$9) \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{AH}$$

$$10) \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$11) \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{II} = \vec{0}$$

$$12) \overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

$$13) \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA}$$

$$14) \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AF}$$

Exercice 7 (Somme de vecteurs et relation de Chasles sans schéma)

Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles :

$$1) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

$$2) \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

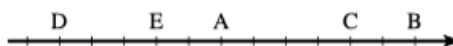
$$3) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

$$4) \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$5) 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$$

Exercice 8 (Multiplication par un réel)

Les points A, B, C, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous. Dans chaque cas, trouver le nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$



$$1) \vec{v} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{AE} \quad \vec{v} = -3\vec{u}$$

$$3) \vec{v} = \overrightarrow{EC} \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = \vec{u}$$

$$2) \vec{v} = \overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{AE} \quad \vec{v} = \frac{2}{5}\vec{u}$$

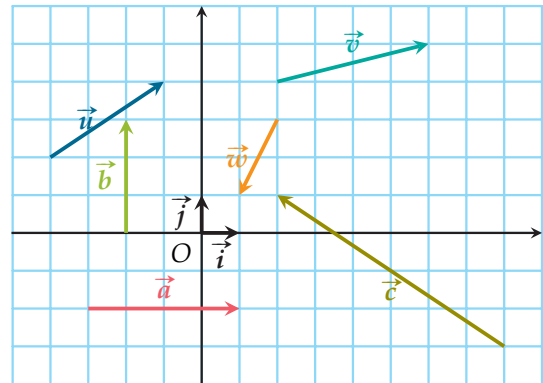
$$4) \vec{v} = \overrightarrow{CD} \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$$

III. Coordonnées de vecteurs

Exercice 9

Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ dans ce repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{array}{llll} \vec{a} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{c} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} & \vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

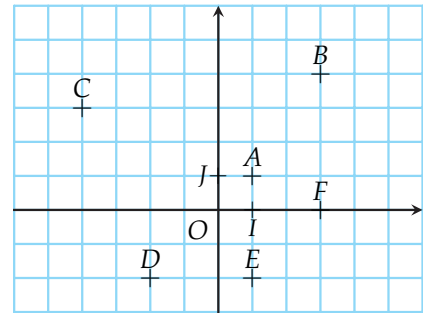


Exercice 10

Lire les coordonnées des vecteurs suivants.

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 1) $\vec{AB}$ | 3) $\vec{CA}$ | 5) $\vec{AE}$ |
| 2) $\vec{AC}$ | 4) $\vec{DE}$ | 6) $\vec{AF}$ |

$$\begin{array}{lll} 1) \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & 3) \vec{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} & 5) \vec{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ 2) \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} & 4) \vec{DE} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & 6) \vec{AF} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$



IV. Calcul des coordonnées de vecteurs

Exercice 11

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $E(-4;3), F(2;-5), G(-4;1)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{EF}, \vec{FG}$ et $\vec{EG}$

On a $\vec{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$, c'est à dire $\vec{EF} \begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ -5 - 3 \end{pmatrix}$ soit $\vec{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, De même on obtient $\vec{FG} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{EG} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- 2) Retrouver les coordonnées de $M(x;y)$ telles que $\vec{EM} = \vec{u}$.

On recherche $M(x;y)$ tel que $\vec{EM} = \vec{u}$. En passant aux coordonnées on obtient l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} x - (-4) \\ y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Au final on obtient alors $M(1;0)$.

Exercice 12

On considère quatre points $F(4;-2), G(-2;5), H(3;-4)$ et $K(7;-5)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{FG}, \vec{GH}, \vec{HK}$ et $\vec{KF}$.

$x_{\vec{FG}} = x_G - x_F = -2 - 4 = -6$ et $y_{\vec{FG}} = y_G - y_F = 5 + 2 = 7$ donc $\vec{FG} \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$x_{\overrightarrow{GH}} = x_H - x_G = 3 + 2 = 5 \text{ et } y_{\overrightarrow{GH}} = y_H - y_G = -4 - 5 = -9 \text{ donc } \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$x_{\overrightarrow{HK}} = x_K - x_H = 7 - 3 = 4 \text{ et } y_{\overrightarrow{HK}} = y_K - y_H = -5 + 4 = -1 \text{ donc } \overrightarrow{HK} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et enfin } x_{\overrightarrow{KF}} = x_F - x_K = 4 - 7 = -3 \text{ et } y_{\overrightarrow{KF}} = y_F - y_K = -2 + 5 = 3 \text{ donc } \overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 2) Déterminer de deux façons différentes les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$.

1re méthode :

$$\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FH} \text{ et on a } x_{\overrightarrow{FH}} = x_H - x_F = 3 - 4 = -1 \text{ et } y_{\overrightarrow{FH}} = y_H - y_F = -4 + 2 = -2.$$

$$\text{On obtient } \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2ème méthode :

$$x_{\overrightarrow{FG}} + x_{\overrightarrow{GH}} = -6 + 5 = -1 \text{ et } y_{\overrightarrow{FG}} + y_{\overrightarrow{GH}} = 7 - 9 = -2. \text{ On obtient les coordonnées } \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans chacun des cas suivants :

1) $A \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{9} \right)$ et $B \left(1; -\frac{8}{9} \right)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ -\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{9}{9} \end{pmatrix}$$

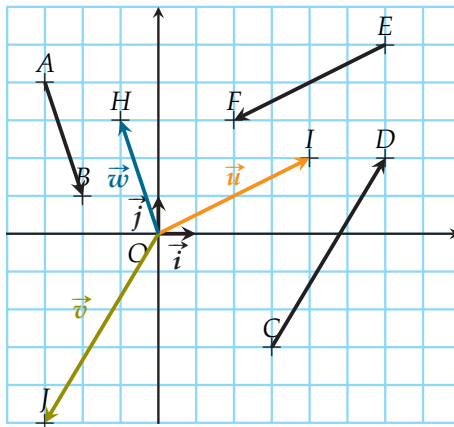
2) $A(-0,6;1,1)$ et $B(0,6;0,7)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0,6 - (-0,6) \\ 0,7 - 1,1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1,2 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

V. Opérations sur les vecteurs

Exercice 14

On considère les points et les vecteurs suivants dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



- 1) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ telles que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Construire le point I tel que $\vec{OI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x_{AB} + x_{CD} \\ y_{AB} + y_{CD} \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ -3 + 5 \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 2) Calculer les coordonnées de $\vec{v}$ telles que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$. Construire le point J tel que $\vec{OJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x_{AB} + x_{EF} \\ y_{AB} + y_{EF} \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} 1 + (-4) \\ -3 + (-2) \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- 3) Calculer les coordonnées de $\vec{w}$ telles que $\vec{w} = \vec{CD} + \vec{EF}$. Construire le point H tel que $\vec{OH} = \vec{CD} + \vec{EF}$.

$$\vec{w} \begin{pmatrix} x_{CD} + x_{EF} \\ y_{CD} + y_{EF} \end{pmatrix} = \vec{w} \begin{pmatrix} 3 + (-4) \\ 5 + (-2) \end{pmatrix} = \vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 15

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Calculer les coordonnées des vecteurs $2\vec{u}$, $-5\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$ et $-\frac{2}{3}\vec{u}$.

$$2\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \quad -5\vec{u} \begin{pmatrix} -25 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \quad -\frac{2}{3}\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B et C respectivement de coordonnées (1;4), (4;6) et (2;3).

- 1) Quelles sont les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme ?

Pour que ABCD soit un parallélogramme on doit avoir $\vec{CD} = \vec{BA}$.

$$\vec{CD} \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \iff x_D - 2 = -3 \text{ et } y_D - 3 = -2.$$

Donc D(-1;1).

- 2) Prouver que ABCD est aussi un losange.

On prouve que 2 côtés consécutifs ont la même longueur.

$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ et $BC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ On a donc $AB=BC$. Le parallélogramme ABCD est donc aussi un losange.

