

Correction - DS n°04 - Produit scalaire - Sujet A

Exercice 1 - (2 points)

On considère 3 points A, B et C . Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ (on donnera la valeur exacte).

1) $AB = 4, AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ ①

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 5 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

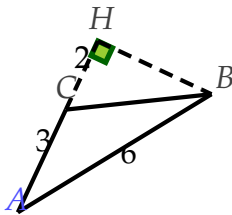
2) $AB = 4, AC = 9$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ ①

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 6 \times 9 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 4 \times 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}\end{aligned}$$

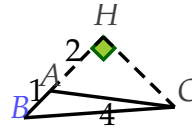
Exercice 2 - (2 points)

Dans les 2 cas ci dessous, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

1)



2)

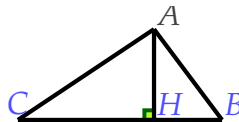


1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}$ ①
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AC \times AH = 3 \times 5 = 15$

2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ ①
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH = -1 \times 2 = -2$

Exercice 3 - (5 points)

ABC est un triangle et H est le pied de la hauteur issue de A. On a $AB = 5, BH = 3$ et $HC = 6$



1) Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ①

On utilise la projection orthogonale.
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{BH} = BC \times BH = 9 \times 3 = 27$

2) Calculer AH ①,5

on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABH.

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = 25 - 9 = 16 \text{ d'où } AH = \sqrt{16} = 4$$

- 3) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$. On prendra si nécessaire $AH = 4$. (1)

On utilise la projection orthogonale.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AH} = AH \times AH = 4 \times 4 = 16$$

- 4) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAH}$. Arrondir au dixième. (1,5)

On sait que $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = 16$ d'après la question précédente. De plus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH \times \cos(\widehat{BAH}). \text{ Donc :}$$

$$16 = 5 \times 4 \times \cos(\widehat{BAH}) \iff \cos(\widehat{BAH}) = \frac{16}{20}. \text{ D'où : } \boxed{\widehat{BAH} \approx 36,7^\circ}$$

Exercice 4 (3 points)

Soit les points $A(2;7)$, $B(6;5)$ et $C(4;1)$.

- 1) Calculer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$. (1,5)

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} 2 - 6 \\ 7 - 5 \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} 4 - 6 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = xx' + yy' = -4 \times (-2) + 2 \times (-4) = 0$$

- 2) Que peut-on en conclure pour le triangle ABC? (1,5)

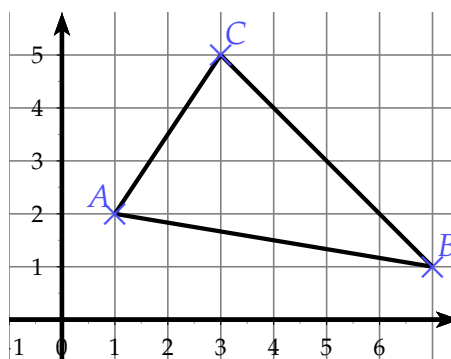
$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \text{ donc } \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{De plus } BA = BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

Exercice 5 - (4,5 points)

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on donne le triangle ABC.



- 1) Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ainsi que les longueurs AB et AC. (2)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

2) calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. ①

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 6 \times 2 + (-1) \times 3 = 9$$

3) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir au dixième. ①,5

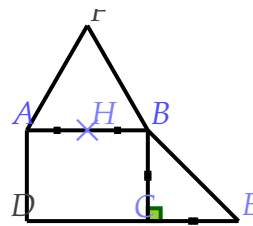
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{9}{\sqrt{37} \times \sqrt{13}} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 65,8^\circ$$

Exercice 6 - (4 points)

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ et $BC = 3$. Le triangle ABF est équilatéral et le triangle BCE est rectangle isocèle en C. H est le milieu de [AB]. Calculer les produits scalaires suivants :

- | | |
|--|--|
| 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ | 5) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$ |
| 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ | 6) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA}$ |
| 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE}$ | 7) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE}$ |
| 4) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AF}$ | 8) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA}$ |



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 = 16$$

5) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = -CD \times CE$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} = -4 \times 3 = -12$$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 4 \times 2 = 8$$

6) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = -CD \times CE$$

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA} = -4 \times 3 = -12$$

3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE}$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$$

7) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = AH \times DE$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE} = 2 \times 7 = 14$$

4) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AF}$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AF} = -4 \times 2 = -8$$

8) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -AD \times AD$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA} = -3 \times 3 = -9$$