

Correction - DS n°04 - Produit scalaire - Sujet B

Exercice 1 - (2 points)

On considère 3 points A, B et C . Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ (on donnera la valeur exacte).

1) $AB = 5, AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 5 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

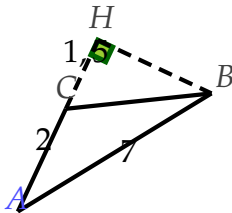
2) $AB = 5, AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 5 \times 8 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}\end{aligned}$$

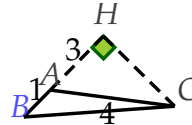
Exercice 2 - (2 points)

Dans les 2 cas ci dessous, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

1)



2)

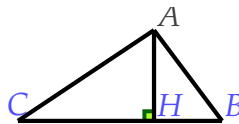


1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}$ ①
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AC \times AH = 2 \times 3,5 = 7$

2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ ①
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH = -1 \times 3 = -3$

Exercice 3 - (5 points)

ABC est un triangle et H est le pied de la hauteur issue de A. On a $AB = 5, BH = 3$ et $HC = 7$



1) Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ①

On utilise la projection orthogonale.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{BH} = BC \times BH = 10 \times 3 = 30$$

2) Calculer AH ①,5

on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABH.

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = 25 - 9 = 16 \text{ d'où } AH = \sqrt{16} = 4$$

- 3) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$. On prendra si nécessaire $AH = 4$. (1)

On utilise la projection orthogonale.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AH} = AH \times AH = 4 \times 4 = 16$$

- 4) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAH}$. Arrondir au dixième. (1,5)

On sait que $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = 16$ d'après la question précédente. De plus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH \times \cos(\widehat{BAH}). \text{ Donc :}$$

$$16 = 5 \times 4 \times \cos(\widehat{BAH}) \iff \cos(\widehat{BAH}) = \frac{16}{20}. \text{ D'où : } \boxed{\widehat{BAH} \approx 36,7^\circ}$$

Exercice 4 - (3 points)

Soit les points $A(-1;8)$, $B(3;6)$ et $C(1;2)$.

- 1) Calculer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$. (1,5)

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 8 - 6 \end{pmatrix} = \vec{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = xx' + yy' = -4 \times (-2) + 2 \times (-4) = 0$$

- 2) Que peut-on en conclure pour le triangle ABC ? (1,5)

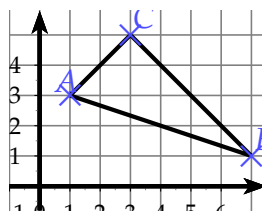
$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \text{ donc } \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{De plus } BA = BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B .

Exercice 5 - (4,5 points)

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on donne le triangle ABC .



- 1) Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ainsi que les longueurs AB et AC . (2)

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 7 - 1 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

- 2) calculer
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- . ①

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy' = 6 \times 2 + (-2) \times 2 = 8$$

- 3) En déduire la mesure, en degré, de l'angle
- $\widehat{BAC}$
- . Arrondir au dixième. 1,5

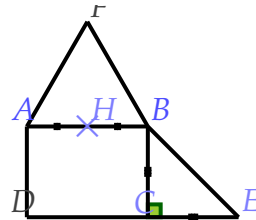
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{8}{\sqrt{40} \times \sqrt{8}} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 63,4^\circ$$

Exercice 6 - (4 points)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 5$. Le triangle ABF est équilatéral et le triangle BCE est rectangle isocèle en C . H est le milieu de $[AB]$. Calculer les produits scalaires suivants :

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ | 5) $\vec{CA} \cdot \vec{CE}$ |
| 2) $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$ | 6) $\vec{CE} \cdot \vec{BA}$ |
| 3) $\vec{AD} \cdot \vec{CE}$ | 7) $\vec{AF} \cdot \vec{DE}$ |
| 4) $\vec{BA} \cdot \vec{AF}$ | 8) $\vec{BE} \cdot \vec{DA}$ |



- 1)
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB \times AB \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 6 \times 6 = 36 \end{aligned}$$

- 5)
- $\vec{CA} \cdot \vec{CE}$

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CE} &= \vec{CD} \cdot \vec{CE} = -CD \times CE \\ \vec{CA} \cdot \vec{CE} &= -6 \times 5 = -30 \end{aligned}$$

- 2)
- $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AH} &= AB \times AH \\ \vec{AB} \cdot \vec{AH} &= 6 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

- 6)
- $\vec{CE} \cdot \vec{BA}$

$$\begin{aligned} \vec{CE} \cdot \vec{BA} &= \vec{CD} \cdot \vec{CE} = -CD \times CE \\ \vec{CE} \cdot \vec{BA} &= -6 \times 5 = -30 \end{aligned}$$

- 3)
- $\vec{AD} \cdot \vec{CE}$

$$\begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{CE} &= \vec{BC} \cdot \vec{CE} \\ \vec{AD} \cdot \vec{CE} &= 0 \end{aligned}$$

- 7)
- $\vec{AF} \cdot \vec{DE}$

$$\begin{aligned} \vec{AF} \cdot \vec{DE} &= \vec{AH} \cdot \vec{DE} = AH \times DE \\ \vec{AF} \cdot \vec{DE} &= 3 \times 11 = 33 \end{aligned}$$

- 4)
- $\vec{BA} \cdot \vec{AF}$

$$\begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{AF} &= -\vec{AB} \cdot \vec{AH} = -AB \times AH \\ \vec{BA} \cdot \vec{AF} &= -6 \times 3 = -18 \end{aligned}$$

- 8)
- $\vec{BE} \cdot \vec{DA}$

$$\begin{aligned} \vec{BE} \cdot \vec{DA} &= \vec{DA} \cdot \vec{AD} = -AD \times AD \\ \vec{BE} \cdot \vec{DA} &= -5 \times 5 = -25 \end{aligned}$$