Chapitre 3

Dérivation - Partie 1

Le mot « *dérivé* » vient du latin « *derivare* » qui signifiait « *détourner un cours d'eau* ». Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

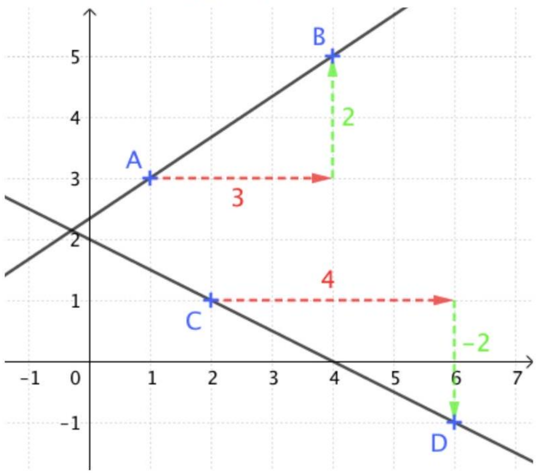
I. Coefficient directeur d'une droite (Rappel)

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{5-3}{4-1} = \frac{2}{3}$$

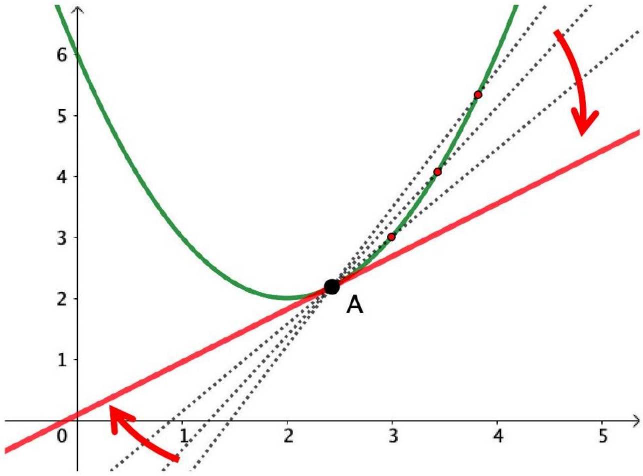
Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à :

$$\frac{-1-1}{6-2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

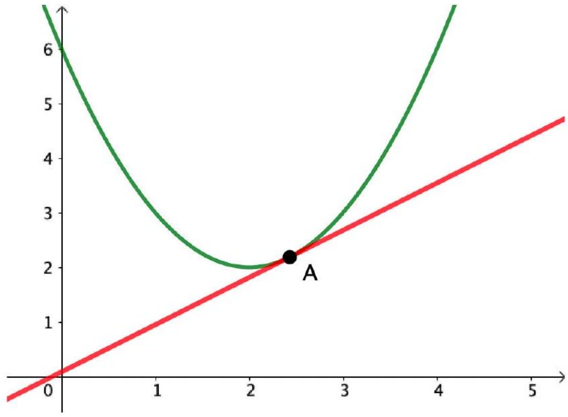


II. Tangente à une courbe et nombre dérivé

Soit A est un point appartenant à la courbe représentative d'une fonction f. On construit un réseau de sécantes à la courbe passant toutes par le point A telle que le 2^e point d'intersection soit de plus en plus proche de A.



On constate que la position limite des sécantes passant par le point A est une droite « *touchant* » la courbe au point A.



Définition

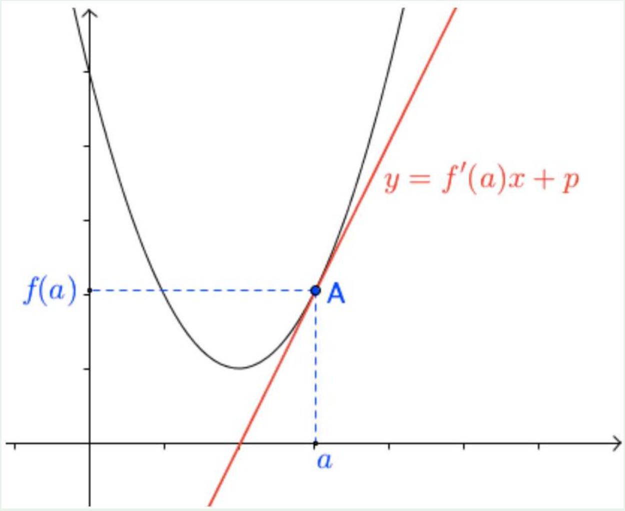
On appelle tangente à la courbe d'une fonction f au point A , la droite limite d'un réseau de sécantes passant par A et dont le 2^e point se rapproche de A.

Remarque Géométriquement, la droite tangente à la courbe en A « *frôle* » la courbe en A .

III. Nombre dérivé

Définition

La tangente à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A dont le coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

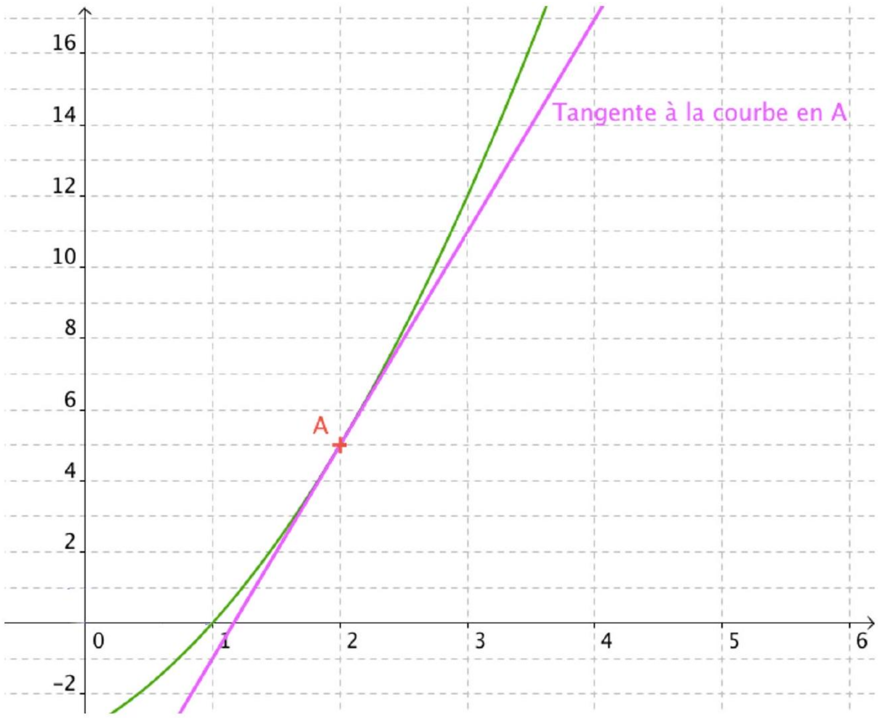


Propriété

L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f en A est de la forme $y = f'(a)x + p$ où p est un nombre réel.

Méthode - Déterminer graphiquement un nombre dérivé

Enoncé : On a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et sa tangente au point d'abscisse 2.



1) Déterminer graphiquement le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A et en déduire le nombre dérivé en 2 .

2) Donner une équation de la tangente.

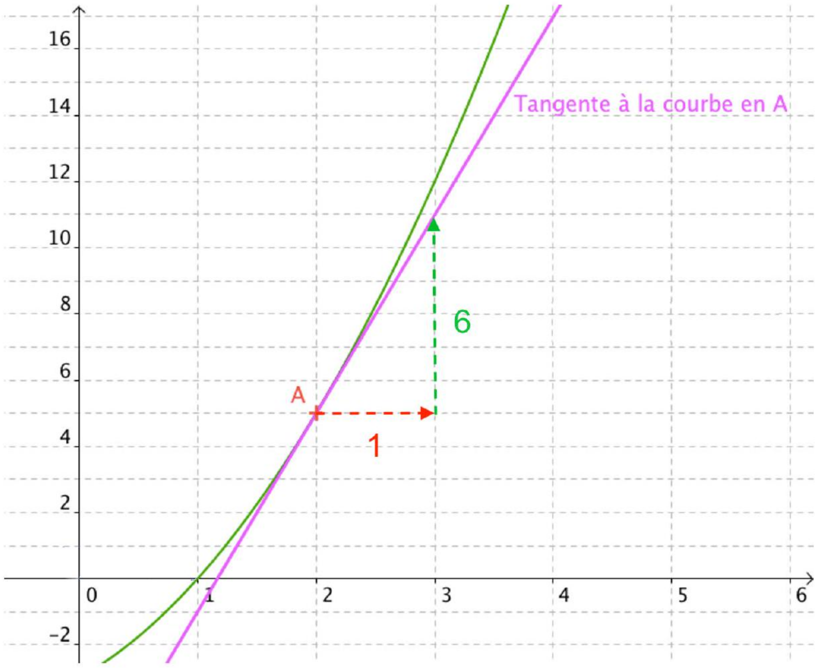
3) En s'aidant de la calculatrice graphique, reproduire la courbe de la fonction f et sa tangente au point A d'abscisse 2.

Solution :

1) Le coefficient directeur de la tangente est égal à :

$$\frac{6}{1} = 6$$

Le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6 .
Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.



2) Une équation de la tangente au pont A d'abscisse 2 est de la forme $y = 6x + p$.
On a : $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$.
Le point A a pour coordonnées $(2\,;\,5)$.
Or, le point A appartient à la tangente donc ses coordonnées $(2\,;\,5)$ vérifient l'équation de la tangente : $y = 6x + p$.
Donc $5 = 6 \times 2 + p$
Et donc $p = 5 - 12 = -7$
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 2 est : $y = 6x - 7$.

3) À l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point.