

Chapitre 5

Dérivation - Partie 2

I. Fonction dérivée

☺ Définition

La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f' .

Formules de dérivation de fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Formules d'opération sur les fonctions dérivées

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(kf)' = kf' \quad k \in \mathbb{R}$$

☰ Méthode - Calculer des fonctions dérivées

Enoncé :

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :

1) $f(x) = 3x$

2) $f(x) = x^2 + 5$

3) $f(x) = 5x^3$

4) $f(x) = 3x^2 + 4x$

Solution :

1) $f'(x) = 3$

2) $f'(x) = 2x + 0 = 2x$

3) $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

4) $f'(x) = 3 \times 2x + 4 = 6x + 4$

II. Fonction dérivée d'une fonction polynôme

1) Fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Pour déterminer la fonction dérivée f' , on applique la technique suivante :

$$f(x) = 5 \times x^2 - 3x + 2$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = 5 \times 2x - 3 + 0 = 10x - 3$$

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle fonction dérivée de f , notée f' , la fonction définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = a \times 2x + b$.

Méthode - Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré**Énoncé :**

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$

3) $h(x) = -x^2 + 7x$

2) $g(x) = -3x^2 + 2x + 8$

Solution :

1) $f'(x) = 4 \times 2x - 6 + 0 = 8x - 6$

3) $h'(x) = -2x + 7$

2) $g'(x) = (-3) \times 2x + 2 = -6x + 2$

2) Fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1.$$

Pour déterminer la fonction dérivée f' , on applique la technique suivante :

$$f(x) = 2 \times x^3 - 3 \times x^2 + 5x - 1$$

↓

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 5 - 0 \\ &= 6x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

Définition

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On appelle fonction dérivée de f , notée f' , la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c$$

Méthode - Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré**Énoncé :**

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$

3) $h(x) = 4x^3 + 1$

2) $g(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$

Solution :

1) $f'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 2 = 15x^2 + 4x + 2$

2) $g'(x) = (-2) \times 3x^2 - 3 \times 2x - 7 = -6x^2 - 6x - 7$

$$3) h'(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$$

III. Variations d'une fonction polynôme

Théorème

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.

Théorème :

⌘ Méthode - Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Énoncé :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

- 1) Calculer la fonction dérivée de f .
- 2) Déterminer le signe de f' en fonction de x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .

Solution :

- 1) $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.
- 2) Étude du signe de la dérivée :

On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

$$\text{Soit : } 4x - 8 = 0$$

$$4x = 8$$

$$x = \frac{8}{4} = 2.$$

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Donc f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis positive (après $x = 2$).

- 3) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7.$$

La fonction f admet un minimum égal à -7 en $x = 2$.

☞ Méthode - Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

Énoncé :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

- 1) a) Calculer la fonction dérivée de f .
b) Démontrer que $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$.
- 2) Déterminer le signe de f' en fonction de x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .

Solution :

- 1) a) On a :

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 = 3x^2 + 9x - 12$$

- b) Développons $3(x+4)(x-1)$:

$$\begin{aligned} & 3(x+4)(x-1) \\ &= (3x+12)(x-1) \\ &= 3x^2 - 3x + 12x - 12 \\ &= 3x^2 + 9x - 12 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f'(x) = 3(x+4)(x-1).$$

- 2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

$$3(x+4)(x-1) = 0$$

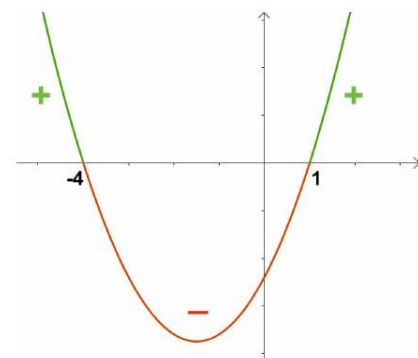
$$x+4 = 0 \quad \text{ou} \quad x-1 = 0$$

$$x = -4 \quad x = 1$$

La dérivée s'annule en -4 et 1 .

Comme $a = 3 > 0$, les branches de la parabole représentant la fonction dérivée sont tournées vers le haut (position ☺).

La dérivée est donc d'abord positive, puis négative, puis positive.



- 3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 61	↘ $-\frac{3}{2}$	↗	

En effet :

$$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2} \times (-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$$

$$f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$$