

Chapitre 1

Thème 1 : Modèles définis par une fonction

Dérivation

I. Rappels sur la dérivation

1) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

L est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition

La **Tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L .

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Méthode - Déterminer l'équation d'une tangente

Énoncé :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

Réponse :

$$f'(x) = 2x + 3 \text{ donc } f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$$

Or, $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$ Donc son équation est de la forme : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit :

$$y = 7(x - 2) + 9 \text{ soit encore } y = 7x - 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

2) formule de dérivation

Fonction	Dérivée
$a, a \in \mathbb{R}$	0
$ax, a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
$x^n, n \geq 1$ entier	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}, n \geq 1$ entier	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$e^{kx}, k \in \mathbb{R}$	ke^{kx}

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

☞ Méthode - Déterminer la fonction dérivée

Enoncé :

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

2) $g(x) = \frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$

Réponse :

1) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

$f(x) = u(x)v(x)$ avec :

$$u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$$

$$v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3 \\ &= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x \\ &= 18x^2 - 38x + 10 \end{aligned}$$

2) $g(x) = \frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$

$$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$$

$$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$$

Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

3) Application à l'étude des variations d'une fonction

🔑 Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

🔗 Méthode - Déterminer les variations d'une fonction

Enoncé :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Déterminer les variations de la fonction f .

Réponse :

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$. Résolvons l'inéquation : $f'(x) \leq 0$

$$2x - 4 \leq 0$$

$$2x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 2]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

II. Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

🔗 Méthode - Déterminer la dérivée d'une fonction composée

Enoncé :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

1) $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^2$

2) $g(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

Réponse :

1) On pose : $f(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } f'(x) &= 2u'(x)u(x) \\ &= 2(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)\end{aligned}$$

2) On pose : $g(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Donc :

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2u'(x)e^{u(x)} = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

☰ Méthode - Étudier une fonction composée**Énoncé :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

- 1) Calculer la dérivée de la fonction f .
- 2) En déduire les variations de la fonction f .

Réponse :

1) On a :

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\text{En effet : } \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

2) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.

f' est donc positive sur l'intervalle $] -\infty; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

f est donc croissante sur l'intervalle $] -\infty; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.