

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

I. Définitions et notations

1) Définition

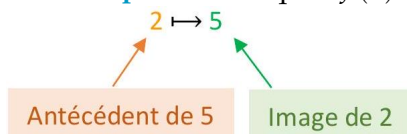
Exemple : On considère la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions 3 et x . Une expression littérale de f est donc : $f(x) = 3x$.

Définition

Une fonction f associe à tout nombre réel x un unique nombre réel, noté $f(x)$.
On note également : $x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.

2) Image et antécédent

Exemple : Dire que : $f(2) = 5$ signifie que :



On dit que :

- l'image de 2 par la fonction f est 5.
- un antécédent de 5 par f est 2.

Remarques

- ☞ Un nombre possède une unique image.
- ☞ Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Méthode - Déterminer l'image d'une fonction par calcul

Énoncé :

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2$.
Calculer l'image de 6 par la fonction g .

Réponse :

$$g(x) = x^2 - 2 \iff g(6) = 6^2 - 2 \iff g(6) = 36 - 2 \iff \boxed{g(6)=34}$$

L'image de 6 par la fonction g est 34.

Méthode - Déterminer un antécédent par calcul

Énoncé :

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f .

Réponse :

On cherche un antécédent de -5 donc -5 est une image.

On peut donc écrire : $f(x) = -5$

Soit : $2x - 3 = -5$

On résout ainsi l'équation :

$$2x = 3 - 5 \iff 2x = -2 \iff \boxed{x = -1}$$

L'antécédent de -5 par f est donc -1 .

II. Représentation graphique

☰ Méthode - Représenter graphiquement une fonction

Énoncé :

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

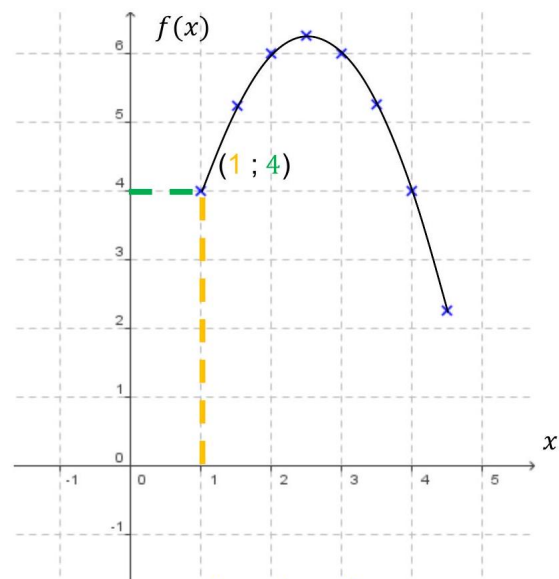
Tracer, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f .

Réponse :

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes.

En reliant les points, on obtient une courbe.

Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x; f(x))$.



III. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

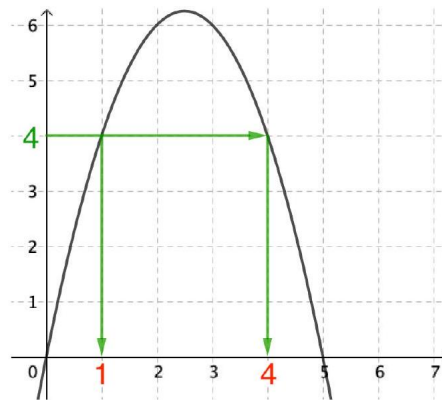
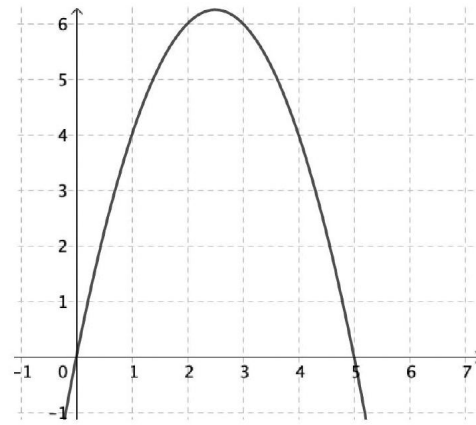
☰ Méthode - Résoudre graphiquement une équation

Énoncé :

On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.

Réponse :

L'équation $5x - x^2 = 4$ peut s'écrire $f(x) = 4$.
Ce qui revient à trouver les antécédents de 4 par la fonction f .
On « part » de l'ordonnée 4, on « rejoint » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 1$ ou $x = 4$.
On peut noter : $S = \{1; 4\}$.



Remarques

- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

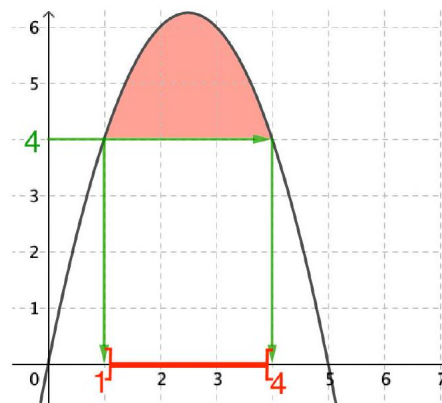
Méthode - Résoudre graphiquement une inéquation

Énoncé :

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

Réponse :

L'inéquation $5x - x^2 > 4$ peut s'écrire $f(x) > 4$.
Ce qui revient à déterminer les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 4. On lit les solutions correspondantes sur l'axe des abscisses :
 x est strictement compris entre 1 et 4.
On peut noter : $S =]1; 4[$.



IV. Variations d'une fonction

1) Taux de variation

🗨 Définition

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est le nombre : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

⚙ Propriété

Le taux de variation de f entre a et b est la pente de la droite passant par les points d'abscisses a et b de la courbe de f .

🔧 Méthode - Déterminer un taux de variation d'une fonction

Enoncé :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 1$.

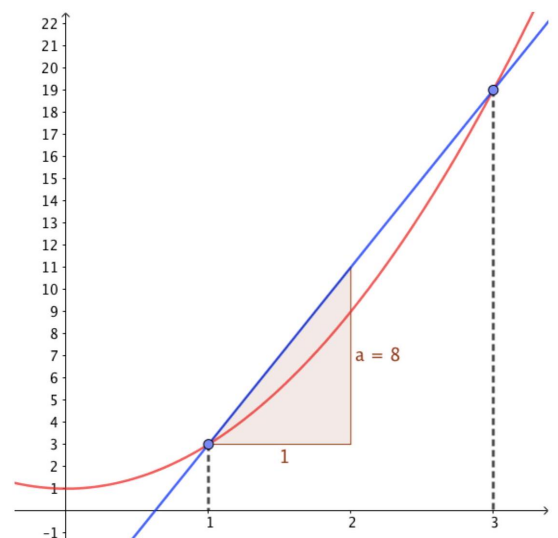
- 1) Déterminer le taux de variation entre 1 et 3.
- 2) Interpréter géométriquement ce taux de variation.

Réponse :

- 1) Si $f(x) = 2x^2 + 1$, alors le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à :

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 \times 3^2 + 1 - (2 \times 1^2 + 1)}{2} = \frac{19 - 3}{2} = 8$$

- 2) Le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à 8 donc la pente de la droite passant par les points d'abscisses 1 et 3 est égale à 8.



2) Fonctions monotones

🗨 Définition

On dit qu'une fonction f est monotone sur un intervalle I , si f est :

- soit croissante sur I ,
- soit décroissante sur I ,
- soit constante sur I .

⚙️ Propriétés

- Si le taux de variation d'une fonction f entre deux nombres quelconques d'un intervalle I est positif, alors f est strictement croissante sur I .
- S'il est négatif, f est strictement décroissante sur I .
- S'il est nul, f est constante sur I .

☞ Méthode - Étudier les variations d'une fonction à l'aide du taux de variation**Énoncé :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x - 3$.

Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Réponse :

On considère deux nombres quelconques distincts a et b .

Le taux de variation de f entre a et b est égal à :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{5b - 3 - (5a - 3)}{b - a} = \frac{5b - 5a}{b - a} = \frac{5(b - a)}{b - a} = 5$$

Or, $5 > 0$ donc $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.