

Correction - Entraînement au DS n°01

Dérivation

Exercice 1 – 5 points

- 1) Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x - 7$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = x^2 - 5x + 4$$

- 2) Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ pour $x \neq -1$.

$$f \text{ est du type } \frac{u}{v} \text{ avec } u(x) = 2x - 3 \text{ et } v(x) = x + 1 \text{ d'où } u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} = \frac{2(x+1) - (2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

- 3) Calculer $f'(t)$ pour $f(t) = 25e^{-0,2t+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 25 \times (-0,2)e^{-0,2t+1} = -5e^{-0,2t+1}$$

- 4) Calculer $f'(t)$ pour $f(t) = (3t+2)e^{-2t}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est du type } u \times v \text{ avec } u(t) = 3t + 2 \text{ et } v(t) = e^{-2t} \text{ d'où } u'(t) = 3 \text{ et } v'(t) = -2e^{-2t}$$

$$f'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t) = 3e^{-2t} - 2(3t+2)e^{-2t} = (-6t-1)e^{-2t}$$

- 5) Calculer $f'(t)$ pour $f(t) = (3t^2 + 2t - 5)^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est du type } f(u(t)) \text{ avec } u(t) = 3t^2 + 2t - 5 \text{ et } f(X) = X^2 \text{ d'où } u'(t) = 6t + 2 \text{ et } f'(X) = 2X$$

$$f'(t) = 2(6t+2)(3t^2+2t-5) = 4(3t+1)(3t^2+2t-5)$$

- 6) Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ sur $] -3; 3[$.

$$f \text{ est du type } f(u(x)) \text{ avec } u(x) = 9 - x^2 \text{ et } f(X) = \sqrt{X} \text{ d'où } u'(x) = -2x \text{ et } f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Exercice 2 – 4 points

Un circuit électrique est formé d'un générateur de force électromotrice $E = 20,0$ V (Volts), de résistance interne $r = 4,0\Omega$ et d'une résistance variable R , en Ohms (Ω).

La puissance absorbée par la résistance R est $\frac{400R}{(R+4)^2}$, en Watts.

- 1) Soit $P(R) = \frac{400R}{(R+4)^2}$.

- a) Calculer $P'(R)$, la dérivée de $P(R)$ sur $[0; +\infty[$.

$$P \text{ est du type } \frac{u}{v} \text{ avec } u(R) = 400R \text{ et } v(R) = (R+4)^2 \text{ d'où } u'(R) = 400 \text{ et } v'(R) = 2(R+4)$$

$$P'(R) = \frac{u'(R)v(R) - v'(R)u(R)}{v^2(R)} = \frac{400(R+4)^2 - 400R \times 2(R+4)}{(R+4)^4}$$

$$P'(R) = \frac{400R^2 + 3200R + 6400 - 800R^2 - 3200R}{(R+4)^4} = \frac{6400 - 400R^2}{(R+4)^4} = \frac{400(16 - R^2)}{(R+4)^4}$$

$$P'(R) = \frac{400(4-R)(4+R)}{(R+4)^4} = \frac{400(4-R)}{(R+4)^3}$$

- b) Dresser le tableau de signes de $P'(R)$ sur $[0; +\infty[$.

Sur $[0; +\infty[$, $(R + 4)^3 > 0$ donc $P'(R)$ est du signe de $4 - R$.

R	0	4	$+\infty$
$P'(R)$	+	0	-

- c) En déduire le tableau de variation de P sur $[0; +\infty[$.

R	0	4	$+\infty$
$P'(R)$	+	0	-
$P(R)$	0	$P(4) = 25$	0

- 2) En déduire la valeur de R pour laquelle la puissance est maximale et préciser cette puissance.

La puissance est maximale quand $R = 4 \Omega$ et vaut alors $P = \frac{400 \times 4}{(4 + 4)^2} = \frac{1600}{64} = 25 \text{ W}$

Exercice 3 – 4 points

Un patient reçoit une injection de médicament. La concentration du médicament dans le sang, en milligrammes par litre, est donnée par $C(t) = 4te^{-0,5t}$ avec $0 \leq t \leq 10$, où t est le temps écoulé depuis l'injection, en heures.

- 1) Déterminer $C'(t)$.

C est du type $u \times v$ avec $u(t) = 4t$ et $v(t) = e^{-0,5t}$ d'où $u'(t) = 4$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$
 $C'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t) = 4e^{-0,5t} - 2te^{-0,5t} = (4 - 2t)e^{-0,5t} = 2(2 - t)e^{-0,5t}$

- 2) Dresser le tableau de signes de la dérivée sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel t , $e^{-0,5t} > 0$ donc $C'(t)$ est du signe de $2 - t$.

t	$-\infty$	2	$+\infty$
$C'(t)$	+	0	-

- 3) en déduire le tableau de variation de la fonction $C(t)$ sur $[0; 10]$

t	0	2	10
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$	0	$C(2) \approx 2,94$	$C(10) \approx 0,27$

- 4) préciser le maximum de la fonction et au bout de combien de temps est-il atteint?

Le maximum de la fonction est $C(2) = 8e^{-1} \approx 2,94 \text{ mg/L}$ de sang et il est atteint au bout de 2 heures

Exercice 4 – 4 points

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^2+3x-4}$, définie sur $\mathbb{R}$

- 1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

f est du type $f(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 3x - 4$ et $f(X) = e^X$ d'où $u'(x) = 2x + 3$ et $f'(X) = e^X$
 $f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x-4}$

- 2) Dresser le tableau de signes de la dérivée sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x , $e^{x^2+3x-4} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x + 3$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

- 3) En déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{25}{4}}$	$\nearrow$

- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

$f(1) = e^{1+3-4} = e^0 = 1$ et $f'(1) = (2+3)e^0 = 5$ donc $y = 5(x - 1) + 1 = 5x - 4$

Exercice 5 – 4 points

Soit la fonction $f : x \mapsto (-x^2 - x + 5)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

f est du type $u \times v$ avec $u(x) = -x^2 - x + 5$ et $v(x) = e^x$ d'où $u'(x) = -2x - 1$ et $v'(x) = e^x$
 $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = (-2x - 1)e^x + (-x^2 - x + 5)e^x = (-x^2 - 3x + 4)e^x$

- 2) Dresser le tableau de signes de la dérivée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$: on étudie le signe de $-x^2 - 3x + 4$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 9 + 16 = 25$ d'où
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{-2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 5}{-2} = -4$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- 3) En déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-4) = -7e^{-4}$	$f(1) = 3e$			