Chapitre 2

Probabilité et échantillonage

I. Expérience aléatoire

1) Vocabulaire

Exemple :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.

Définitions

- Une **expérience** (lancer un dé par exemple) est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** (1 ou 3 par exemple) et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.
- L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'**univers** (1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

2) Réalisation d'une expérience aléatoire

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Total
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

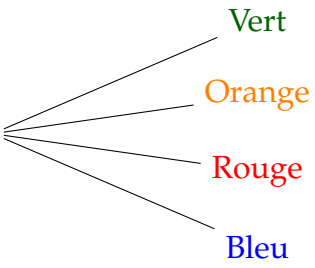
Faces	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Total
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

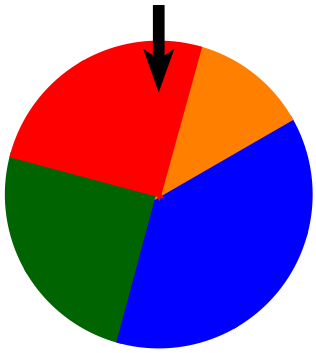
Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.
Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1 , un 2, . . . ou un 6 . En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

II. Probabilité d'un événement

1) Arbre des possibles

Exemple : Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des possibles :





Définition

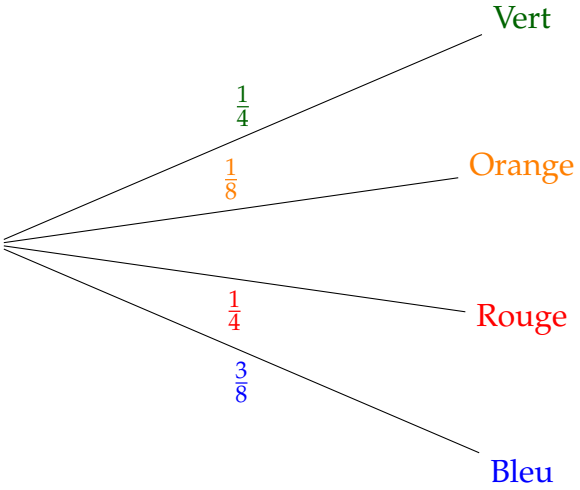
L'**arbre des possibles** permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

2) Probabilité

Définition

Les fréquences obtenues d'un événement E se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (**Loi des grands nombres**). Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'événement E.

Exemple : 2 secteurs sur 8 sont de couleur verte. Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur verte.
On dit que la probabilité d'obtenir un secteur vert est égale à $\frac{2}{8}$ soit $\frac{1}{4}$.
On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



3) Événement

Exemple : Soit l'événement E « *La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge* ».
On pourrait se demander qu'elle est la probabilité que cet événement se réalise ?

Pour cela, on regarde dans l'arbre des possibles, la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur rouge et la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur bleu et on les additionne. E se réalise : $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$
On dit que la probabilité que l'événement E se réalise est égale à $\frac{5}{8}$ et on note : $P(E) = \frac{5}{8}$.

Définitions

- Un **événement** est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Dans l'exemple, « *La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge* » est un événement. « *La roue s'arrête sur un secteur vert* » est un événement élémentaire.

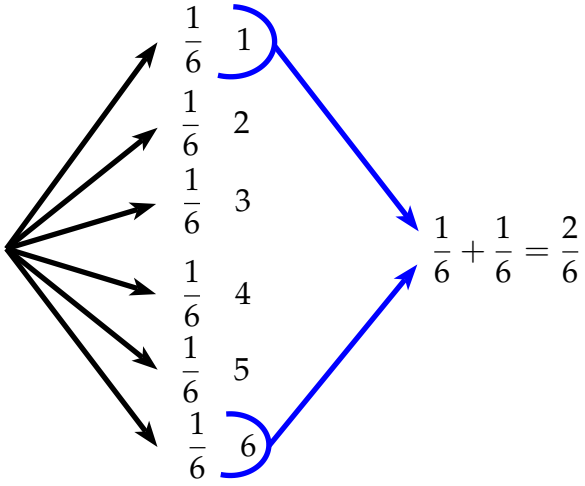
Méthode - Dénombrer pour calculer une probabilité

Enoncé : On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit E l'événement : « *On tire un as* ».
Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?
Réponse :
Il y a 32 issues possibles car il existe 32 façon différentes de tirer une carte.
L'événement E possède 4 issues possibles : As de coeur, as de carreau, as de trèfle et as de pique.
La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à : $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Méthode - Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles

Enoncé : On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit E l'événement : « *La face du dessus est un 1 ou un 6* ».
Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?

Réponse :
On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :
Chaque issue à la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1 , un 2, . . . ou un 6.
On dit qu'il y a équiprobabilité.



Ainsi $P(E) = \frac{1}{3}$

La probabilité que l'événement E se réalise est de $\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.

Propriété

1) La probabilité $P(E)$ d'un événement E est telle : $0 \leq P(E) \leq 1$.
2) La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Définition

L'ensemble des probabilités de ces événements élémentaires constitue ce qu'on appelle la **loi de probabilité**.

4) Événement contraire

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit E l'événement : « *La face du dessus est un 1 ou un 6* ».
Alors l'événement contraire de E est : « *La face du dessus est un 2, un 3 , un 4 ou un 5* ». Cet événement est noté $\overline{E}$.

Propriété

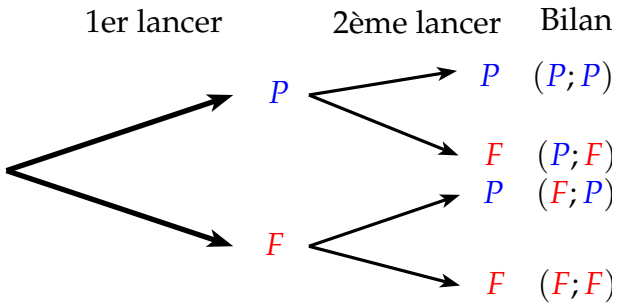
La probabilité de l'événement contraire d'un événement E est : $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

5) Exemple d'une expérience aléatoire à deux épreuves

Méthode - Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

Enoncé : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.
Soit E l'événement : « *On obtient au moins une fois la face PILE.* »
Calculer $P(E)$ en utilisant un arbre des possibles.

Réponse :
On construit un arbre des possibles présentant les résultats possibles aux deux épreuves de l'expérience. Le 1er niveau de l'arbre correspond aux issues du 1er lancer (1ère épreuve). Le 2^e niveau de l'arbre correspond les issues du 2^e lancer (2^e épreuve).



On compte 4 issues en tout : $(P;P)$, $(P;F)$, $(F;P)$ et $(F;F)$.
L'événement E possède 3 issues : $(P;P)$, $(P;F)$ et $(F;P)$.
La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à $\frac{3}{4}$.
Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois « *PILE* » lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

III. Réunion et intersection de deux événements

1) Définitions

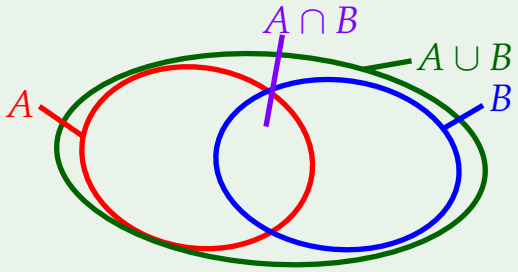
Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « *On tire un valet* » B : « *On tire un coeur ou un carreau* »

L'intersection des événements A et B est l'événement :
« *On tire le valet de coeur ou le valet de carreau* ». On note cet événement $A \cap B$ et on lit « *A inter B* ».

La réunion des événements A et B est l'événement :
« *On tire le valet de piques, le valet de trèfle, un coeur ou un carreau* ». On note cet événement $A \cup B$ et on lit « *A union B* ».

Définitions

- **L'événement « *A et B* »**, noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.
- **L'événement « *A ou B* »**, noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



2) Probabilité d'une réunion

Théorème

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Méthode - Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

Enoncé : On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
On considère les événements suivants :
A : « *On obtient un nombre impair* » et B : « *On obtient un multiple de 3* ».
Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.
Réponse :

$P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$A \cap B$ est l'événement élémentaire : « *On obtient un 3* », donc : $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
L'événement $A \cup B$ a donc pour probabilité :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3) Événements incompatibles

Définition

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété

Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « *On tire un valet* » et B : « *On tire un roi* ».
Les deux événements A et B sont incompatibles, en effet $A \cap B = \emptyset$. On en déduit que la probabilité de l'événement « *Tirer un valet ou un roi* » est égale à :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

IV. Probabilités conditionnelles

1) Calcul à l'aide d'un tableau croisé

Définition

On appelle probabilité conditionnelle de $\boldsymbol{B}$ sachant $\boldsymbol{A}$, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Propriété

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

On rappelle que Cardinal de A, noté Card(A), désigne le nombre d'issues de l'événement A.

Méthode - Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau

Enoncé :
Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
A : « *Le patient a pris le médicament A.* »
G : « *Le patient est guéri.* »
Calculer :

a) $P(A)$ **b)** $P(G)$ **c)** $P(G \cap A)$ **d)** $P(\overline{G} \cap A)$

2) **a)** On choisit maintenant au hasard un patient guéri.
Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A sachant qu'il est guéri.

b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.
Calculer la probabilité que le patient soit guéri sachant qu'il a pris le médicament B.

Réponse :

1) **a)** La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à : $P(A) = \dfrac{455}{800} \approx 0,57 = 57\%$.

b) La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à : $P(G) = \dfrac{674}{800} \approx 0,84 = 84\%$.

c) La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à $P(G \cap A) = \dfrac{383}{800} \approx 0,48 = 48\%$.

d) La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à : $P(\overline{G} \cap A) = \dfrac{72}{800} \approx 0,09 = 9\%$.

2) **a)**

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient ait pris le médicament A sachant qu'il est guéri se note $P_G(A)$ et est égale à $P_G(A) = \dfrac{383}{674} = \dfrac{\text{Card}(A \cap G)}{\text{Card}(A)} \approx 0,57 = 57\%$. On regarde uniquement la ligne des patients guéris.

b) La probabilité que le patient soit guéri sachant qu'il a pris le médicament B se note $P_{\overline{A}}(G)$ et est égale à $P_{\overline{A}}(G) = \dfrac{\text{Card}(\overline{A} \cap G)}{\text{Card}(G)} = \dfrac{291}{345} \approx 0,84 = 84\%$. On regarde uniquement la colonne du médicament B.

2) Calcul à l'aide de la formule

Propriété

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Méthode - Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide de la formule

Enoncé :
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On note les événements :
A : « *Le résultat est un coeur* » ;
B : « *Le résultat est un valet* ».
Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un valet sachant qu'on a tiré un cur.

Réponse :
$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,03125$.
Donc la probabilité que le résultat soit un valet sachant qu'on a tiré un coeur est :
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,03125}{0,25} = 0,125$.

3) Calcul à l'aide d'un arbre

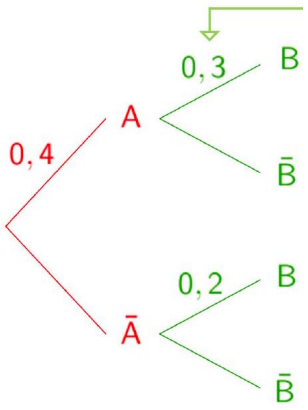
Propriété

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

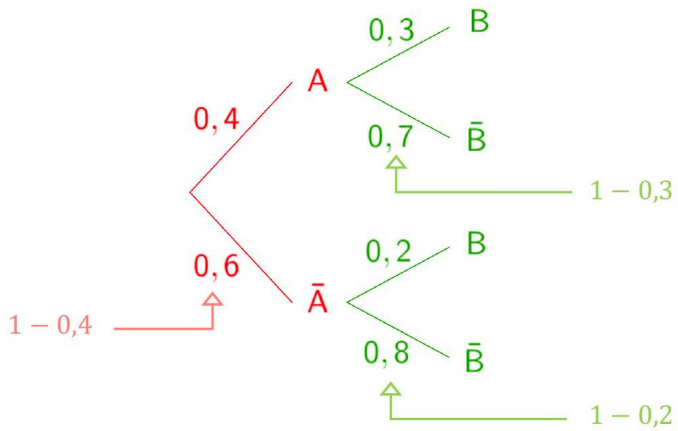
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Exemple : On donne : $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0,2$

- On reporte ces probabilités dans l'arbre :



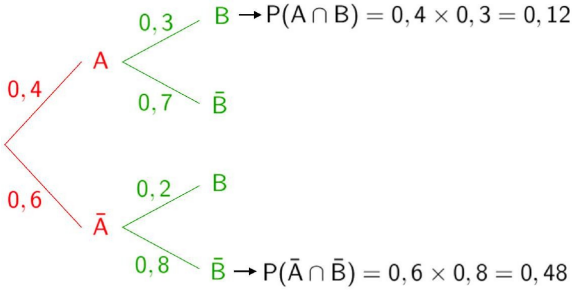
- On complète les probabilités manquantes :



On utilise la formule :

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

- On calcule les probabilités d'intersections :



On utilise la formule :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

V. Loi des grands nombres

Exemples :

1) Sur l'ensemble des cartes à puce produites par une entreprise en une semaine, on en prélève 200. On dit que cet ensemble de 200 cartes à puce constitue un échantillon de taille 200 de la population de toutes les cartes à puce produites en une semaine.
2) On s'intéresse aux intentions de vote lors d'une élection. On sonde 1000 personnes en leur demandant leur intention de vote. L'ensemble de ces 1000 personnes constitue un échantillon de taille 1000 de la population totale des électeurs.
3) On lance une pièce de monnaie 50 fois de suite et on note les résultats obtenus. L'ensemble de ces 50 lancers constitue un échantillon de taille 50.

Définition

Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience sur l'ensemble des personnes ou objets sur lesquels porte l'étude statistique (la population).
Un échantillon issu d'une population est donc l'ensemble de quelques éléments de cette population.

Propriété

Loi des grands nombres : Lorsque n devient grand, la fréquence observée est le plus souvent proche de la probabilité.