

Chapitre 01 - Généralités sur les fonctions

Correction des exercices obligatoires

Exercice 1 – Exercice 1 p 56 – Parkour + – Hachette technique

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

- 1) Calculer les images de 0 ; 2 ; -1 par f .

$$f(0) = 2 \times 0 + 3 = 3 \quad f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7 \quad f(-1) = 2 \times (-1) + 3 = 1$$

Les images de 0 ; 2 et -1 par f sont respectivement **3 ; 7 et 1**.

- 2) Déterminer un antécédent de 3 , puis de 7 par f .

$$f(x) = 3 \iff 2x + 3 = 3 \iff 2x = 0 \iff x = 0. \text{ Un antécédent de 3 par } f \text{ est } \mathbf{0}.$$

$$f(x) = 7 \iff 2x + 3 = 7 \iff 2x = 4 \iff x = 2. \text{ Un antécédent de 7 par } f \text{ est } \mathbf{2}.$$

Exercice 2 – Exercice 2 p 56 – Parkour + – Hachette technique

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto -4x + 1$.

- 1) Calculer l'image de 4 par f .

$$f(4) = -4 \times 4 + 1 = -16 + 1 = -15. \text{ L'image de 4 par } f \text{ est } \mathbf{-15}.$$

- 2) Déterminer le ou les antécédents éventuels de -15 par f .

$$f(x) = -15 \iff -4x + 1 = -15 \iff -4x = -16 \iff x = \frac{-16}{-4} = 4.$$

-15 a un seul antécédent par f : **4**.

Exercice 3 – Exercice 3 p 56 – Parkour + – Hachette technique

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2 - 4x$.

- 1) Calculer les images de -2 et de 3 par h .

$$h(-2) = (-2)^2 - 4 \times (-2) = 4 + 8 = 12. \text{ L'image de } -2 \text{ par } h \text{ est } \mathbf{12}.$$

$$h(3) = 3^2 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3. \text{ L'image de 3 par } h \text{ est } \mathbf{-3}.$$

- 2) Déterminer le ou les antécédents éventuels de 0 par h .

$$h(x) = 0 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x - 4) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0 \iff x = 4$$

0 a deux antécédents par h : **0 et 4**.

Exercice 4 – Exercice 25 p 50 – Le Livre scolaire

On considère la fonction $g : x \mapsto 3x + 2 + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sans utiliser la calculatrice, calculer $g(1)$, $g(2)$ et $g(\frac{1}{2})$.

$$g(1) = 3 \times 1 + 2 + \frac{1}{1} = 3 + 2 + 1 = \mathbf{6}$$

$$g(2) = 3 \times 2 + 2 + \frac{1}{2} = 6 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 2 + 2 = \frac{3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

Exercice 5 – Exercice 50 p 52 – Le Livre scolaire

On considère la fonction $f : x \mapsto -2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer l'image de 3 par f .

$$f(3) = -2 \times 3 + 1 = -6 + 1 = -5$$

- 2) Que vaut $f(-5)$?

$$f(-5) = -2 \times (-5) + 1 = 10 + 1 = 11$$

- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 5$.

$$f(x) = 5 \iff -2x + 1 = 5 \iff -2x = 4 \iff x = \frac{4}{-2} = -2$$

$$S = \{-2\}$$

- 4) Donner le (ou les) antécédent(s) de -11 par la fonction f .

$$f(x) = -11 \iff -2x + 1 = -11 \iff -2x = -12 \iff x = 6$$

-11 a un unique antécédent par f : 6.

Exercice 6 – Exercice 51 p 52 – Le Livre scolaire

On considère la fonction $g : x \mapsto 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer les images de $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{6}$ par la fonction g .

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{3} + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$g\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \frac{5}{6} + 2 = \frac{15}{6} + 2 = \frac{5}{2} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2}$$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \leq -4$.

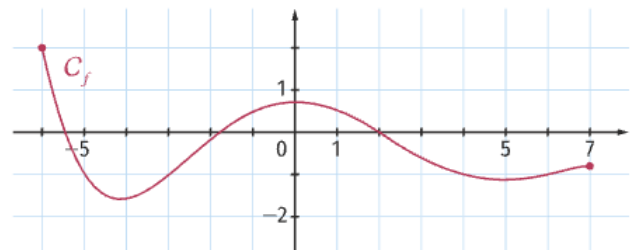
$$g(x) \leq -4 \iff 3x + 2 \leq -4 \iff 3x \leq -6 \iff x \leq -2 \quad (\text{on divise par } 3 > 0, \text{ le sens ne change pas}).$$

$$S =]-\infty; -2]$$

Exercice 7 – Exercice 23 p 50 – Le Livre scolaire

On considère une fonction f définie sur $[-6; 7]$ dont la représentation graphique C_f est donnée ci-dessous.

- 1) Déterminer graphiquement $f(2)$.
- 2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1$ sur $[-6; 7]$.
- 3) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle sur l'intervalle $[-6; 7]$?



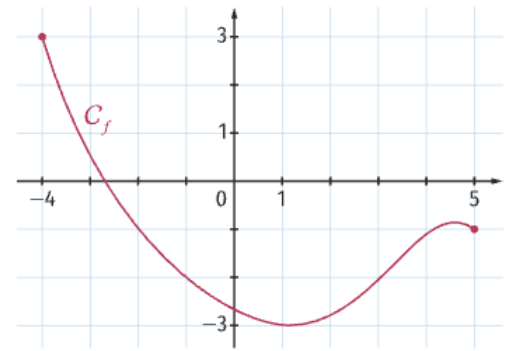
- 1) Le point de C_f d'abscisse 2 est sur l'axe des abscisses : $f(2) = 0$.

- 2) On cherche les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y = -1$. Avec la précision permise par le graphique : $S \approx \{-4,8; -3; 4,2; 5,8\}$.

- 3) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en 3 points (abscisses environ -5,2; -1,2 et 2). L'équation $f(x) = 0$ admet donc **3 solutions** sur $[-6; 7]$.

Exercice 8 – Exercice 27 p 50 – Le Livre scolaire

On considère une fonction f définie sur $[-4; 5]$ dont la représentation graphique C_f est donnée ci-dessous.



- 1) Déterminer $f(-2)$, $f(3)$ et $f(5)$.
- 2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -2$ sur $[-4; 5]$?
- 3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1$ sur $[-4; 5]$?
- 4) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > -2$ sur $[-4; 5]$.
- 5) Donner un nombre réel a admettant un unique antécédent par f .

1) Par lecture graphique : $f(-2) = -1$; $f(3) = -2$; $f(5) = -1$.

2) On cherche les abscisses des points de C_f d'ordonnée -2 :
 $S = \{-1; 3\}$

3) On cherche les abscisses des points de C_f d'ordonnée -1 :
 $S \approx \{-2; 4; 5\}$

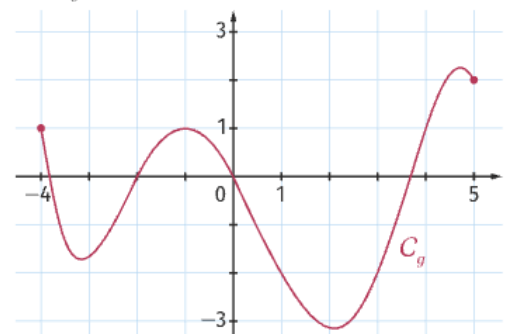
4) On cherche les abscisses des points de C_f situés strictement au-dessus de la droite d'équation $y = -2$:
 $S = [-4; -1[\cup]3; 5]$

5) Par exemple, $a = 2$: la droite d'équation $y = 2$ ne coupe C_f qu'en un seul point (sur la partie gauche de la courbe).

Autres réponses possibles : $a = 3$ (antécédent -4) ou $a = -3$ (antécédent 1 , le minimum de f).

Exercice 9 – Exercice 28 p 50 – Le Livre scolaire

On considère la fonction g dont la représentation graphique C_g est donnée ci-dessous.



- 1) Résoudre l'équation $g(x) = 1$ sur $[-4; 5]$.
- 2) Déterminer graphiquement $g(5)$.
- 3) Résoudre l'inéquation $g(x) < -2$ sur $[-4; 5]$.
- 4) Donner un réel qui possède exactement quatre antécédents par la fonction g .

1) On cherche les abscisses des points de C_g d'ordonnée 1 :
 $S \approx \{-4; -1; 4\}$

2) Le point de C_g d'abscisse 5 a pour ordonnée 2 : $g(5) = 2$.

3) On cherche les abscisses des points de C_g situés strictement en dessous de la droite d'équation $y = -2$:
 $S \approx]1,2; 2,8[$

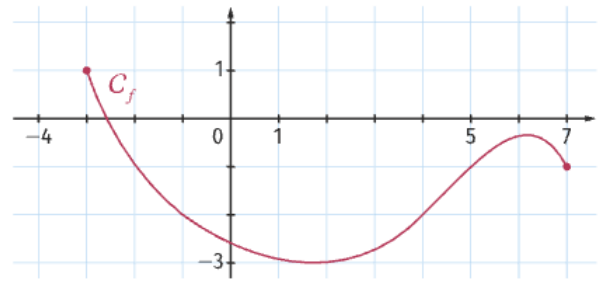
4) Par exemple 0 : la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) coupe C_g en exactement 4 points. 0 possède donc exactement quatre antécédents par g .

Tout réel strictement compris entre le minimum local de gauche (environ $-1,5$) et 1 convient.

Exercice 10 – Exercice 52 p 52 – Le Livre scolaire

On considère une fonction f dont la courbe représentative C_f est donnée dans le repère orthonormé ci-dessous.

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.
 - a) $f(x) = -2$ c) $f(x) < -2$ e) $f(x) \geq -2$
 - b) $f(x) = -1$ d) $f(x) = 1$



1) La courbe est tracée pour des abscisses allant de -3 à 7 : $\mathcal{D}_f = [-3; 7]$.

2) a) $f(x) = -2$: $S \approx \{-1; 4\}$

2) b) $f(x) = -1$: $S \approx \{-2; 5; 7\}$

2) c) $f(x) < -2$: $S \approx]-1; 4[$

2) d) $f(x) = 1$: $S = \{-3\}$

2) e) $f(x) \geq -2$: $S \approx [-3; -1] \cup [4; 7]$

Exercice 11 – Exercice 31 p 62 – Parkour + – Hachette technique

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$.

- 1) Calculer le taux de variation de f entre 1 et 2.

$$f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2 \text{ et } f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5.$$

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5 - 2}{1} = 3$$

- 2) Calculer le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$f(5) = 3 \times 5 - 1 = 14 \text{ et } f(8) = 3 \times 8 - 1 = 23.$$

$$\frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{23 - 14}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

- 3) Que remarque-t-on?

Les deux taux de variation sont égaux à 3, qui est le coefficient directeur de la fonction affine f .
Pour une fonction affine $x \mapsto mx + p$, le taux de variation est toujours égal à m .

Exercice 12 – Exercice 32 p 62 – Parkour + – Hachette technique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- 1) Calculer le taux de variation de f entre 2 et 3.

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5$$

- 2) Calculer le taux de variation de f entre -3 et -1

$$\frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{1 - 9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Exercice 13 – Exercice 33 p 62 – Parkour + – Hachette technique

Soit f une fonction définie par sa représentation graphique dans un repère.

Avec la précision permise par le graphique :

- 1) Déterminer le taux de variation de f entre -3 et -1.

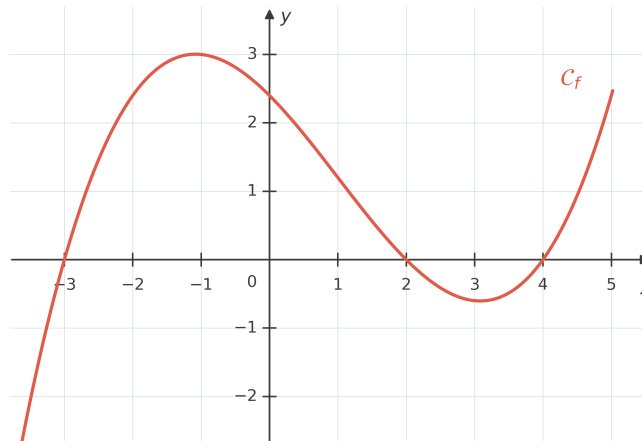
Par lecture graphique : $f(-3) = 0$ et $f(-1) = 3$.

$$\frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{3 - 0}{2} = 1,5$$

- 2) Déterminer le taux de variation de f entre 0 et 2.

Par lecture graphique : $f(0) \approx 2,4$ et $f(2) = 0$.

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \approx \frac{0 - 2,4}{2} \approx -1,2$$



Exercice 14 – Exercice 34 p 62 – Parkour + – Hachette technique

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 3$ et deux réels x_1 et x_2 .

- 1) Calculer le taux de variation de f entre x_1 et x_2 . Simplifier au maximum l'expression.

Pour $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(4x_2 + 3) - (4x_1 + 3)}{x_2 - x_1} = \frac{4x_2 + 3 - 4x_1 - 3}{x_2 - x_1} = \frac{4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 4$$

- 2) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Le taux de variation de f entre deux réels quelconques est égal à 4, qui est toujours positif.
Donc f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 – Exercice 35 p 62 – Parkour + – Hachette technique

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- 1) Calculer le taux de variation de f entre 1 et 2.

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = 3$$

- 2) On considère deux réels x_1 et x_2 . Calculer le taux de variation de f entre x_1 et x_2 . Simplifier au maximum l'expression.

Pour $x_1 \neq x_2$, en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$$

- 3) Donner le signe du taux de variation dans le cas où x_1 et x_2 sont positifs, puis dans le cas où x_1 et x_2 sont négatifs.

Si x_1 et x_2 sont positifs (et distincts), leur somme $x_1 + x_2$ est **positive**.

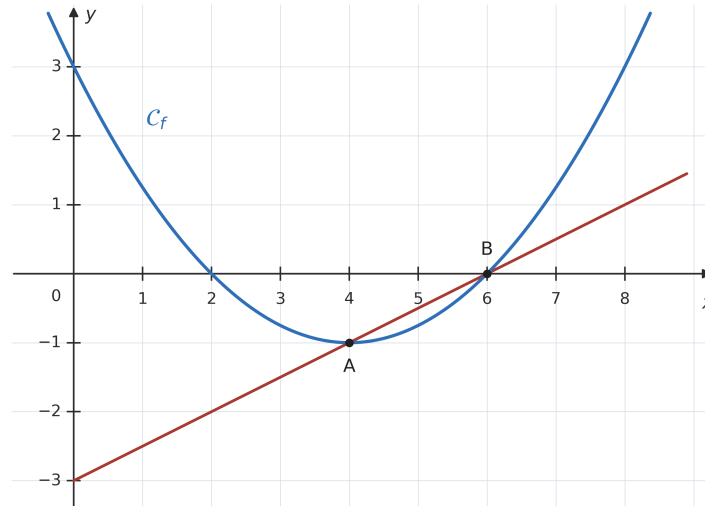
Si x_1 et x_2 sont négatifs (et distincts), leur somme $x_1 + x_2$ est **négative**.

- 4) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est **décroissante** sur $] -\infty ; 0]$ et **croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 16 – Exercice 37 p 62 – Parkour + – Hachette technique

On donne dans un repère la courbe représentative de la fonction f et deux points A et B.



- 1) Lire les coordonnées de A et B sur le graphique et en déduire le coefficient directeur de la droite (AB).

On lit $A(4; -1)$ et $B(6; 0)$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-1)}{6 - 4} = \frac{1}{2}$$

- 2) On admet que la fonction a pour expression : $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$

Déterminer le taux de variation de f entre 4 et 6.

$$f(4) = \frac{1}{4} \times (4 - 2) \times (4 - 6) = \frac{1}{4} \times 2 \times (-2) = -1 \quad \text{et} \quad f(6) = \frac{1}{4} \times 4 \times 0 = 0.$$

$$\frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{0 - (-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

- 3) Quel lien existe-t-il entre les résultats précédents ?

Les deux résultats sont égaux : le taux de variation de f entre 4 et 6 est égal au coefficient directeur de la sécante (AB), où A et B sont les points de C_f d'abscisses 4 et 6.

Exercice 17 – Exercice 9 p 55 – Calao

On considère la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, et deux réels x_1 et x_2 distincts non nuls.

- 1) Exprimer le taux de variation entre x_1 et x_2 .

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}$$

- 2) Simplifier au mieux le quotient.

On réduit le numérateur au même dénominateur : $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \frac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$.

D'où :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} \times \frac{1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{x_1 x_2}$$

- 3) Étudier son signe suivant le signe de x_1 et x_2 .

Si x_1 et x_2 sont de même signe (tous deux strictement positifs ou tous deux strictement négatifs) :
 $x_1 x_2 > 0$, donc $-\frac{1}{x_1 x_2} < 0$. Le taux de variation est **négatif**.

Si x_1 et x_2 sont de signes contraires : $x_1 x_2 < 0$, donc $-\frac{1}{x_1 x_2} > 0$. Le taux de variation est **positif**.

- 4) En déduire la monotonie de la fonction inverse, en précisant l'intervalle.

Sur chacun des intervalles $] -\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, deux réels x_1 et x_2 sont de même signe, donc le taux de variation est négatif.

La fonction inverse est **strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$** et **strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$** .

Attention : elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier, car par exemple $-1 < 1$ et $f(-1) = -1 < f(1) = 1$.

Exercice 18 – Exercice 10 p 55 – Calao

Soit f définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-4}{x+2}$ et deux réels distincts x_1 et x_2 de $] -2 ; +\infty[$.

- 1) Exprimer le taux de variation entre x_1 et x_2 .

On calcule d'abord la différence des images :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{-4}{x_2 + 2} + \frac{4}{x_1 + 2} = \frac{-4(x_1 + 2) + 4(x_2 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{4x_2 - 4x_1}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$$

D'où :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$$

- 2) Conclure sur la monotonie de la fonction f .

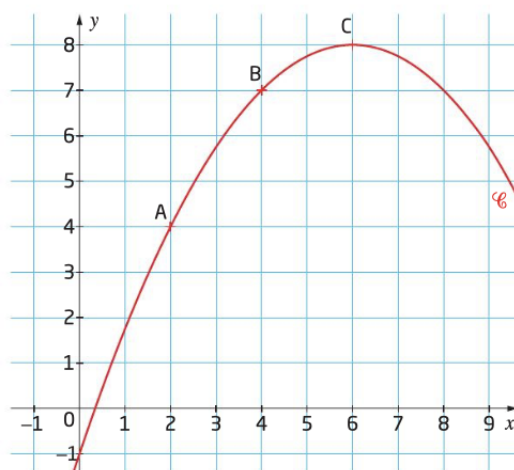
Comme $x_1 > -2$ et $x_2 > -2$, on a $x_1 + 2 > 0$ et $x_2 + 2 > 0$, donc $(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0$.

Le taux de variation $\frac{4}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$ est donc strictement positif.

La fonction f est **strictement croissante sur $] -2 ; +\infty[$** .

Exercice 19 – Exercice 11 p 55 – Calao

On considère la fonction f représentée par la courbe C.



- 1) a) Lire la pente des sécantes (AB) et (BC).

On lit $A(2; 4)$, $B(4; 7)$ et $C(6; 8)$.

$$\text{Pente de } (AB) : m_{AB} = \frac{7-4}{4-2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\text{Pente de } (BC) : m_{BC} = \frac{8-7}{6-4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

- b) Déterminer leur équation réduite.

Droite (AB) : $y = 1,5x + p$. Elle passe par $A(2; 4)$: $4 = 1,5 \times 2 + p$, donc $p = 1$.

$$(AB) : y = 1,5x + 1$$

Droite (BC) : $y = 0,5x + p$. Elle passe par $B(4; 7)$: $7 = 0,5 \times 4 + p$, donc $p = 5$.

$$(BC) : y = 0,5x + 5$$

- 2) La courbe C a pour équation $y = \frac{-x^2}{4} + 3x - 1$.

- a) Calculer le taux de variation de f entre 0 et 2.

$$f(0) = 0 + 0 - 1 = -1 \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{-4}{4} + 6 - 1 = -1 + 6 - 1 = 4.$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - (-1)}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

- b) Calculer le taux de variation de f entre 3,9 et 4. On utilisera au mieux la calculatrice.

$$f(3,9) = \frac{-3,9^2}{4} + 3 \times 3,9 - 1 = \frac{-15,21}{4} + 11,7 - 1 = -3,8025 + 10,7 = 6,8975$$

$$f(4) = \frac{-16}{4} + 12 - 1 = -4 + 12 - 1 = 7$$

$$\frac{f(4) - f(3,9)}{4 - 3,9} = \frac{7 - 6,8975}{0,1} = \frac{0,1025}{0,1} = 1,025$$