

Chapitre 1

Fonctions polynôme de degré 2

I. Définition

Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage « *trinôme* ».

Exemples :

	f fonction polynôme de degré 2 ?		a = ?	b = ?	c = ?
$f(x) = \dots$	oui	non			
$2x^2 - 5x + 3$	X		2	-5	3
x^2	X		1	0	0
$3x^3 + 6x - 1$		X			
$2x + 3 - x^2$	X		-1	2	3
$(2x + 1)(2 - 3x)$	X		-6	1	2
$3x^2 + 1$	X		3	0	1
$3x + 7$		X			

II. Représentation graphique

1) La parabole

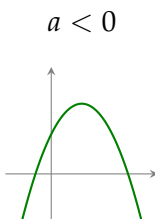
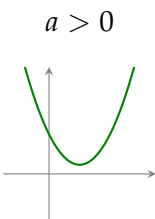
Définition

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée **parabole**.

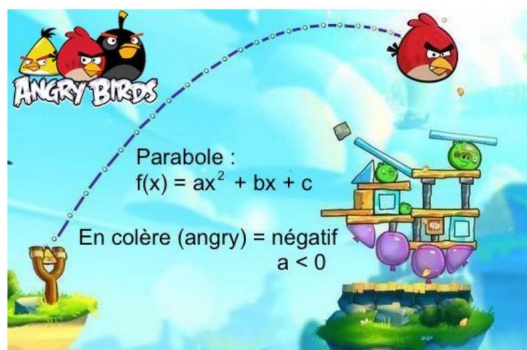
Propriétés

Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante.
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante.

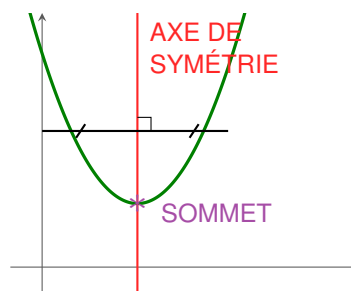


Les branches de la parabole sont tirées vers le haut. Les branches de la parabole sont tirées vers le bas.



2) Axe de symétrie et sommet de la courbe

La courbe d'une fonction polynôme du second degré possède un axe de symétrie.
Le sommet de la courbe se trouve à l'intersection de l'axe de symétrie avec la courbe.

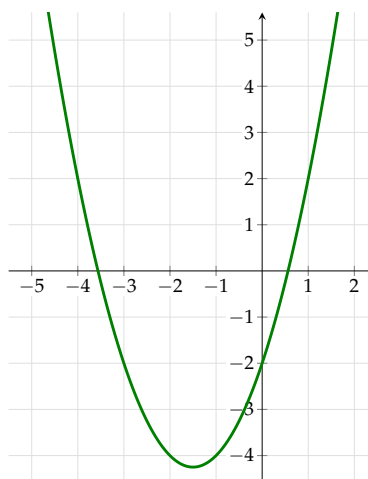


☰ Méthode - Déterminer les éléments caractéristiques d'une parabole

Enoncé :

On a représenté la fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

- 1) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
- 2) Tracer l'axe de symétrie de la courbe.
- 3) Donner les coordonnées du sommet de la courbe.



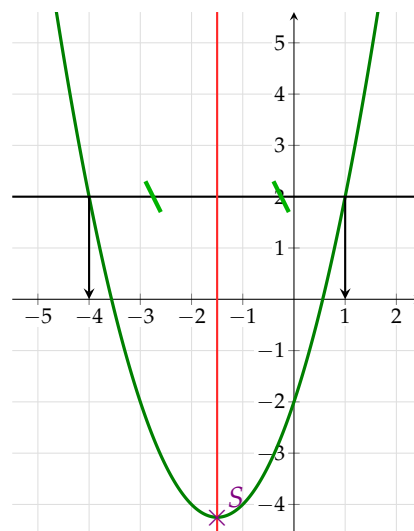
Réponse :

- 1) Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $x = -4$ et $x = 1$.
- 2) L'axe de symétrie de la courbe est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en $-1,5$.
En effet : $(-4 + 1) : 2 = -1,5$.
- 3) Le sommet est à l'intersection de l'axe de symétrie avec la courbe. Donc son abscisse est $-1,5$.
Son ordonnée est :

$$f(-1,5) = (-1,5)^2 + 3 \times (-1,5) - 2 = -4,25.$$

Les coordonnées du sommet sont donc :

$$(-1,5; -4,25).$$



Propriété

L'axe de symétrie d'une courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + c$ est l'axe des ordonnées et son sommet est le point de coordonnées $(0; c)$.

Méthode - Associer une fonction du second degré à sa représentation graphique

Énoncé :

Associer chaque fonction à sa représentation graphique :

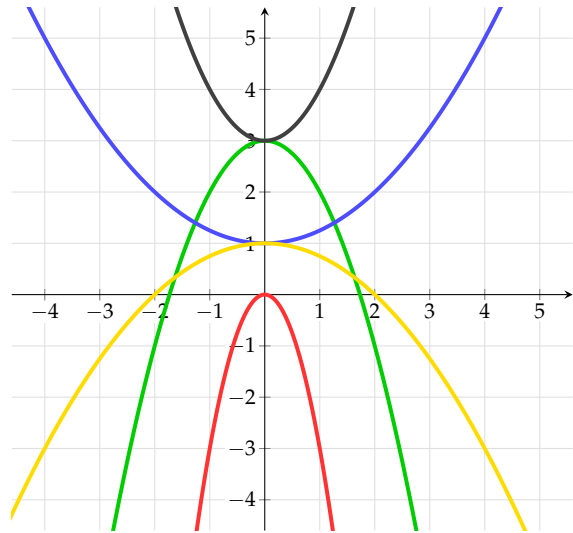
$$f(x) = -x^2 + 3$$

$$g(x) = -3x^2$$

$$h(x) = x^2 + 3$$

$$p(x) = \frac{x^2}{4} + 1$$

$$q(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$$



Réponse :

- La parabole rouge est la seule dont le sommet est l'origine $(0; 0)$. Donc $c = 0$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + c$.
Ainsi, la parabole rouge représente la fonction g définie par $g(x) = -3x^2$.
- La parabole verte et la parabole noire ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées $(0; 3)$.
Donc $c = 3$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + c$.
Ainsi, il faut choisir parmi les expressions : $f(x) = -x^2 + 3$ et $h(x) = x^2 + 3$.
- Les branches de la parabole noire sont tournées vers le haut donc $a > 0$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + c$.
Ainsi, la parabole noire représente la fonction h pour qui $a = 1 > 0$.
- Les branches de la parabole verte sont tournées vers le bas donc $a < 0$.
Ainsi, la parabole verte représente la fonction f pour qui $a = -1 < 0$.
- La parabole bleue et la parabole jaune ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées $(0; 1)$.
Donc $c = 1$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + c$.
Ainsi, il faut choisir parmi les expressions : $p(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ et $q(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$.
- Les branches de la parabole bleue sont tournées vers le haut donc $a > 0$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + c$.
Ainsi, la parabole bleue représente la fonction p pour qui $a = \frac{1}{4} > 0$.
- Les branches de la parabole jaune sont tournées vers le bas donc $a < 0$.
Ainsi, la parabole jaune représente la fonction q pour qui $a = -\frac{1}{4} < 0$.

3) Tableau de variations

Propriété

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 Si $a > 0$ Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$f(x)$			

x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$f(x)$			

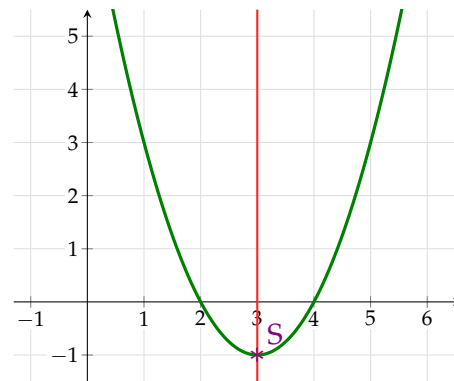
Définition

le point de coordonnées $(x_S; y_S)$ avec y_S l'extremum de f sur P est appelé **sommet de la parabole**.

Exemple : On donne le tableau de variations de la fonction polynôme du second degré f .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$			

Le point de coordonnées $(3; -1)$ est le sommet S de la courbe.
 L'axe de symétrie est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en 3.



III. Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2

Exemple : La fonction f définie par $f(x) = 2(x - 3)(x + 2)$ est une fonction du second degré.
 En effet, elle s'écrit aussi sous la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

$$f(x) = 2(x - 3)(x + 2) = 2(x^2 + 2x - 3x - 6) = 2x^2 - 2x - 12.$$

Définition

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est une fonction polynôme de degré 2 écrite sous sa **forme factorisée**.

Propriété

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
 L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées **les racines** de la fonction polynôme f .

☰ Méthode - Associer une fonction du second degré à sa représentation graphique

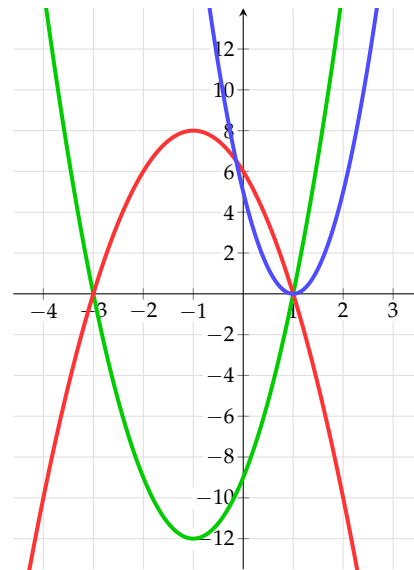
Enoncé :

Associer chaque fonction à sa représentation graphique :

$$f(x) = 3(x - 1)(x + 3)$$

$$g(x) = -2(x - 1)(x + 3)$$

$$h(x) = 5(x - 1)^2$$



Réponse :

- On a : $h(x) = 5(x - 1)^2 = 5(x - 1)(x - 1)$.
La fonction h est la seule à posséder une racine double égale à 1. Cela signifie que la parabole correspondante ne possède qu'un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.
La parabole bleue intercepte l'axe des abscisses en 1 uniquement, c'est donc la représentation graphique de la fonction h .
- Les fonctions f et g sont de la forme $f(x) = 3(x - 1)(x + 3)$ et $g(x) = -2(x - 1)(x + 3)$.
Ces fonctions possèdent donc toutes les deux les mêmes racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.
On peut donc les associer à la parabole rouge et à la parabole verte qui passent toutes les deux par les points d'abscisse -3 et 1.
Les branches de la parabole verte sont tournées vers le haut donc $a > 0$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
Ainsi, la parabole verte représente la fonction f pour qui $a = 3 > 0$.
La parabole rouge représente alors la fonction g .

☰ Méthode - Factoriser une expression du second degré connaissant une racine

Enoncé :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

- Conjecturer une racine de la fonction polynôme f et vérifier par calcul.
- Factoriser f .

Réponse :

- On peut conjecturer que 1 est racine de la fonction polynôme f .
En effet, $f(1) = 2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$.
- D'après l'expression de la fonction f , on a : $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
On peut affirmer que $a = 2$.
Par ailleurs, 1 est une racine de f . Donc, sous sa forme factorisée, f s'écrit :

$$f(x) = 2(x - 1)(x - x_2).$$

Il s'agit donc de déterminer x_2 , tel que : $2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x - x_2)$.

En prenant par exemple $x = 0$, cette égalité s'écrit : $-6 = 2(-1)(-x_2)$, soit $-6 = 2x_2$ ou encore

$$-3 = x_2.$$

Ainsi, sous sa forme factorisée, la fonction polynôme f s'écrit $f(x) = 2(x - 1)(x - (-3))$ ou encore $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$.

IV. Signe d'une fonction polynôme de degré 2

≡ Méthode - Étudier le signe d'un polynôme du second degré

Énoncé :

Étudier le signe de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$

Réponse :

Le signe de $-2(x - 3)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur -2 , $x - 3$ et $x + 2$.

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 3$$

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$-2(x - 3)(x + 2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; 3]$ et $f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$.

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.

