Chapitre 11

Correction
Exercices obligatoires - Probabilités

I. Modélisation des expériences aléatoires

Exercice 1 - (Évènement certain/impossible/élémentaire) - 34 p 310 du LS
On lance un dé à 6 faces supposé équilibré. L'univers est $\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$.
Dire si les événements suivants sont des événements certains, impossibles, élémentaires ou non élémentaires.

1) « *Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6* »

Toutes les issues réalisent cet événement : c'est un **événement certain et non élémentaire**.

2) « *Obtenir un nombre premier* »

Cet événement est $\{2\,;\,3\,;\,5\}$: il contient plusieurs issues, c'est un **événement non élémentaire**.

3) « *Obtenir un multiple de 3* »

Cet événement est $\{3\,;\,6\}$: c'est un **événement non élémentaire**.

4) « *Obtenir un multiple de 7* »

Aucune face du dé n'est un multiple de 7 : c'est un **événement impossible**.

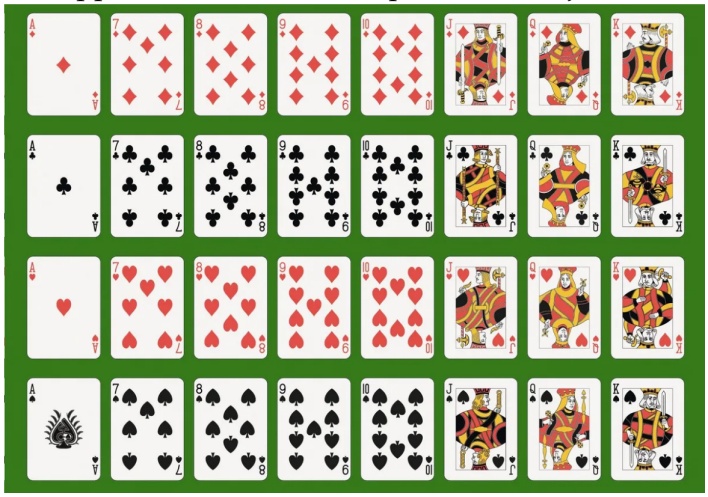
5) « *Obtenir un diviseur de 7* »

Les diviseurs de 7 sont 1 et 7, mais seul le 1 est sur le dé. Cet événement est $\{1\}$: il ne contient qu'une seule issue, c'est un **événement élémentaire**.

6) « *Obtenir un diviseur de 12* »

Cet événement est $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\}$: c'est un **événement non élémentaire**.

Exercice 2 - (Univers d'une expérience) - 37 p 310 du LS
On rappelle ci-dessous la composition d'un jeu de 32 cartes.



Dans chaque cas, déterminer l'univers associé à l'expérience aléatoire décrite.

1) On tire une carte au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

$\Omega = \{\text{pique} ; \text{cur} ; \text{carreau} ; \text{trèfle}\}$
(Si l'on s'intéresse uniquement à la couleur rouge ou noire : $\Omega = \{\textit{rouge} ; \textit{noir}\}$*.)*

2) On tire une carte au hasard et on s'intéresse à sa valeur.

$\Omega = \{7 ; 8 ; 9 ; 10 ; \text{valet} ; \text{dame} ; \text{roi} ; \text{as}\}$

Exercice 3 - (Univers d'une expérience) - 38 p 310 du LS
Une urne contient des jetons indiscernables au toucher. Sa composition est la suivante.



Dans chaque cas, déterminer l'univers associé à l'expérience aléatoire décrite.

1) On tire un jeton au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

$\Omega = \{\text{rouge} ; \text{bleu} ; \text{vert}\}$

2) On tire un jeton au hasard et on s'intéresse à sa valeur.

$\Omega = \{1 ; 2 ; 4\}$

II. Calculs de probabilité

Exercice 4 - 46 p 311 du LS
On considère un cadenas dont la clé est un code à trois chiffres. On tente une combinaison au hasard.

1) Combien y a-t-il de codes possibles ?

Chaque chiffre peut prendre 10 valeurs (de 0 à 9). Les codes vont de 000 à 999.
Il y a donc $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ codes possibles.

2) En déduire la probabilité de trouver le bon code.

On est en situation d'équiprobabilité et un seul code est le bon :

$$P(\text{« trouver le bon code »}) = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$$

Exercice 5 - 47 p 311 du LS
On fait tourner la roue ci-dessous dont tous les secteurs angulaires sont de même mesure.



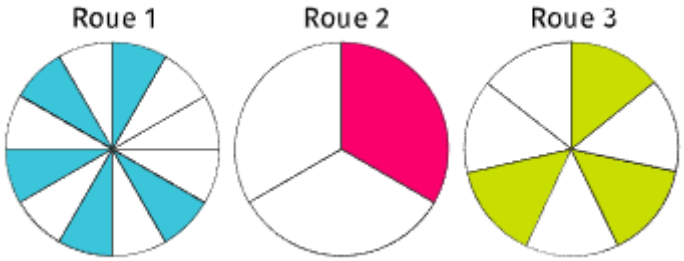
Compléter le tableau ci-dessous.

Tous les secteurs ont la même mesure : on est en situation d'équiprobabilité. La roue compte 15 secteurs : 2 bleus, 3 rouges, 4 verts et 6 jaunes.

Couleur	Bleu	Rouge	Vert	Jaune
Probabilité	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Vérification : $\frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{6}{15} = \frac{15}{15} = 1$.

Exercice 6 - 48 p 311 du LS
Lors d'une kermesse, dans un stand, sont disposées les trois roues ci-dessous.

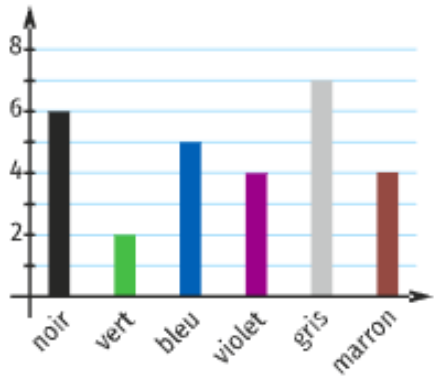


Tous les secteurs angulaires d'une même roue ont la même mesure. Le joueur doit choisir une des trois roues et la lancer. Il remporte un lot s'il tombe sur un secteur coloré.
Quelle roue le joueur doit-il choisir ?

Pour chaque roue, on est en situation d'équiprobabilité.
Roue 1 : 5 secteurs colorés sur 12, donc $p_1 = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$.
Roue 2 : 1 secteur coloré sur 3, donc $p_2 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$.
Roue 3 : 3 secteurs colorés sur 7, donc $p_3 = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$.
Pour comparer p_1 et p_3, on réduit au même dénominateur : $p_1 = \frac{35}{84}$ et $p_3 = \frac{36}{84}$, donc $p_3 > p_1 > p_2$.
Le joueur doit choisir la **roue 3**.

Exercice 7 - 50 p 311 du LS

Le matin, Dominique choisit au hasard dans son tiroir une paire de chaussettes indiscernables au toucher dont la répartition est donnée par le diagramme en barres ci-dessous.



Compléter le tableau ci-dessous.

D'après le diagramme : 6 noires, 2 vertes, 5 bleues, 4 violettes, 7 grises et 4 marron, soit $6+2+5+4+7+4=28$ paires au total.

Couleur	Noir	Vert	Bleu	Violet	gris	Marron
Probabilité	$\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$	$\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$	$\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$	$\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$

Exercice 8 - 53 p 313 du LS

Un jeu de tarot comporte 78 cartes :

- 56 cartes « *classiques* » (14 de chaque couleur : roi ; dame ; cavalier ; valet ; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2 ; as) ;
- 21 atouts (numérotés de 1 à 21) ;
- un joker appelé « *excuse* ».

Lors du comptage des points à la fin d'une partie, les cartes n'ont pas la même valeur :

- un roi, l'atout 1 , l'atout 21 et l'excuse rapportent 4,5 points ;
- une dame rapporte 3,5 points ;
- un cavalier rapporte 2,5 points ;
- un valet rapporte 1,5 points ;
- toutes les autres cartes rapportent 0,5 point.

On tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité de tirer :

1) une carte noire ?

Les cartes noires sont les piques et les trèfles parmi les cartes classiques : $2\times 14=28$ cartes.

$$P(\text{« carte noire »})=\frac{28}{78}=\frac{14}{39}\approx 0{,}359$$

2) une carte qui rapporte moins d'un point ?

Ce sont les cartes qui rapportent 0,5 point :

- les cartes classiques de l'as au 10 : $10\times 4=40$ cartes ;
- les atouts autres que le 1 et le 21 : $21-2=19$ cartes.

Soit $40+19=59$ cartes.

$$P(\text{« moins d'un point »})=\frac{59}{78}\approx 0{,}756$$

3) une carte qui rapporte plus de 2 points ?

Ce sont les cartes qui rapportent 4,5 ; 3,5 ou 2,5 points :

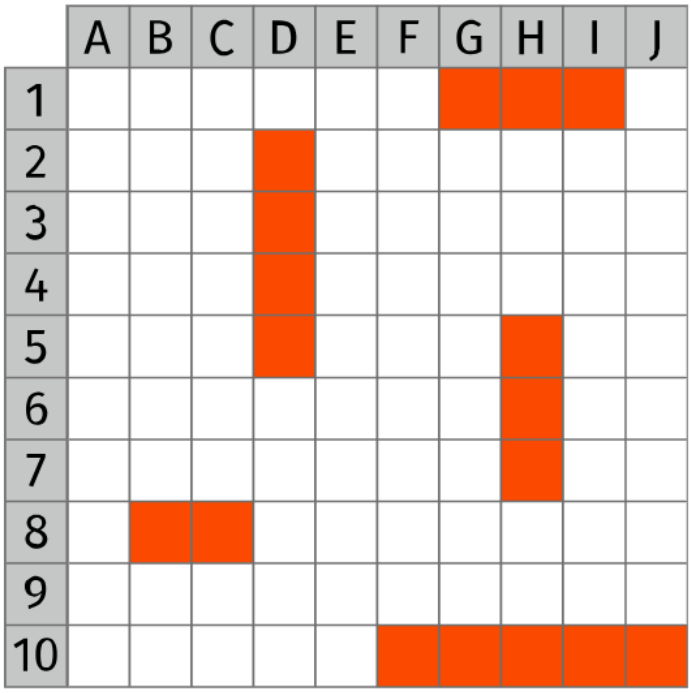
- les 4 rois, l'atout 1, l'atout 21 et l'excuse : 7 cartes ;
- les 4 dames ;
- les 4 cavaliers.

Soit $7+4+4=15$ cartes.

$$P(\text{« plus de 2 points »}) = \frac{15}{78} = \frac{5}{26} \approx 0{,}192$$

Exercice 9 - 58 p 313 du LS

À la bataille navale, chaque joueur a une flotte composée de cinq bateaux : un porte-avions (5 cases), un croiseur (4 cases), un contre-torpilleur (3 cases), un sous-marin (3 cases) et un torpilleur (2 cases). Un joueur a disposé ses bateaux comme représentés ci-après. Les bateaux sont obligatoirement disposés horizontalement ou verticalement.



L'autre joueur choisit de tirer sur une case au hasard.

1) Quelle est la probabilité qu'il touche un bateau ?

La grille compte $10 \times 10 = 100$ cases. Les bateaux occupent $5+4+3+3+2=17$ cases.

$$P(\text{« toucher un bateau »}) = \frac{17}{100} = 0{,}17$$

2) Quelle est la probabilité qu'il touche un bateau s'il décide de ne tirer que dans les colonnes D et H ?

Les colonnes D et H comptent $2 \times 10 = 20$ cases.

- Colonne D : cases D2, D3, D4 et D5, soit 4 cases occupées ;
- Colonne H : cases H1, H5, H6, H7 et H10, soit 5 cases occupées.

$$P = \frac{4+5}{20} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

3) Au tour précédent, il a touché la case D4. Quelle est la probabilité de toucher à nouveau le croiseur en jouant correctement ?

Les bateaux étant placés horizontalement ou verticalement, un joueur qui joue correctement tire sur l'une des 4 cases voisines de D4 : C4, E4, D3 ou D5.
Parmi elles, D3 et D5 appartiennent au croiseur.

$$P(\text{« } \textit{toucher à nouveau le croiseur} \text{ »}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Exercice 10 - 63 p 314 du LS

Pour choisir le prénom de leur futur enfant, un couple regarde le calendrier du mois de novembre et il choisit un jour au hasard. On admet que la méthode utilisée par le couple pour choisir un jour de novembre représente une situation d'équiprobabilité.
Le mois de novembre compte 30 jours.

1) Quelle est la probabilité de tomber sur un jour impair ?

Les jours impairs sont 1, 3, 5, ..., 29, soit 15 jours.

$$P = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

2) Quelle est la probabilité de tomber sur un jour où apparaît le chiffre 1 ?

Les jours où apparaît le chiffre 1 sont : 1 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 21, soit 12 jours.

$$P = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

3) Quelle est la probabilité de tomber sur un jour férié ?

En novembre, il y a 2 jours fériés : le 1er novembre (Toussaint) et le 11 novembre (Armistice).

$$P = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$$

Exercice 11 - 72 p 315 du LS

Dans un village, il y a deux boulangeries. On considère les événements :

- A : « *la première boulangerie est ouverte* »
- B : « *la deuxième boulangerie est ouverte* »

On sait que $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,8$. De plus, il y a toujours au moins une des deux boulangeries ouverte. Exprimer chacun des événements suivants en fonction des événements A et B et déterminer leur probabilité.

1) D : « *au moins une des deux boulangeries est ouverte* »

$D = A \cup B$.
Il y a toujours au moins une boulangerie ouverte, donc D est un événement certain : $P(D) = \mathbf{1}$.

2) E : « *aucune boulangerie n'est ouverte* »

$E = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$: c'est l'événement contraire de D.
$P(E) = 1 - P(D) = 1 - 1 = \mathbf{0}$ (événement impossible).

3) F : « *les deux boulangeries sont ouvertes* »

$F = A \cap B$.
D'après la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 1 = \mathbf{0{,}4}$$

Exercice 12 - (Formule de la réunion) - 29 p 309 du LS
On donne $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,7$ et $P(A \cap B) = 0,2$.
Calculer $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = \mathbf{0{,}9}$$

Exercice 13 - (Formule de la réunion) - 30 p 309 du LS
On donne $P(R) = 0,6$; $P(S) = 0,8$ et $P(R \cup S) = 0,9$.
Calculer $P(R \cap S)$.

De $P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S)$, on déduit :

$$P(R \cap S) = P(R) + P(S) - P(R \cup S) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}9 = \mathbf{0{,}5}$$

Exercice 14 - (Formule de la réunion) - 31 p 309 du LS
On donne $P(E) = 0,6$; $P(E \cap F) = 0,5$ et $P(E \cup F) = 0,7$.
Calculer $P(F)$.

De $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$, on déduit :

$$P(F) = P(E \cup F) - P(E) + P(E \cap F) = 0{,}7 - 0{,}6 + 0{,}5 = \mathbf{0{,}6}$$

Exercice 15 - (Formule de la réunion) - 35 p 310 du LS
On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On note :

- A l'événement : « *la carte tirée est un coeur* » ;
- B l'événement : « *la carte tirée est un roi* » ;
- C l'événement : « *la carte tirée est noire* ».

Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$.
On est en situation d'équiprobabilité. On a $P(A) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{4}{52}$ *et* $P(C) = \frac{26}{52}$.

$\boldsymbol{P(A \cap B)}$: $A \cap B$ est l'événement « *la carte tirée est le roi de cur* ».

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

$\boldsymbol{P(A \cup B)}$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

$\boldsymbol{P(A \cap C)}$: un cur est une carte rouge, il ne peut pas être noir. Les événements A et C sont incompatibles :

$$P(A \cap C) = 0$$

$\boldsymbol{P(A \cup C)}$: A et C étant incompatibles,

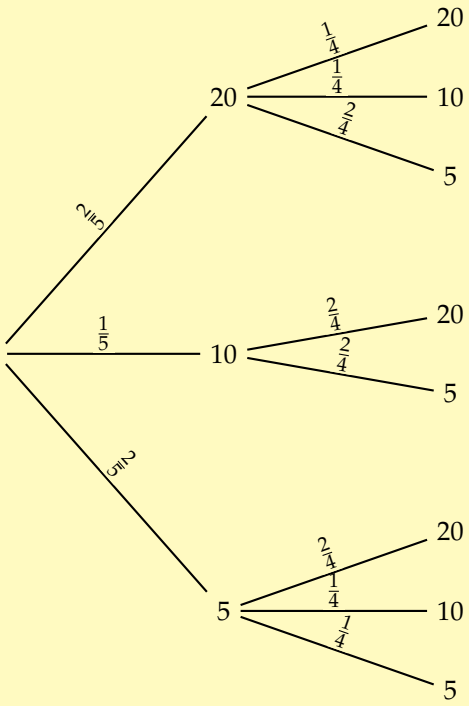
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{13}{52} + \frac{26}{52} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$

Exercice 16 - (Évènements incompatibles) - 74 p 316 du LS

Dans un sac opaque, on met deux billets de 5 €, un billet de 10 € et deux billets de 20 €. Tous les billets sont indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux billets dans le sac.

1) Traduire la situation par un arbre de probabilité.

Au premier tirage, il y a 5 billets. Au second tirage, il n'en reste plus que 4.



On considère les événements :

- A : « *on tire deux billets identiques* » ;
- B : « *on tire au moins un billet de* 20 € ».

2) Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

A est réalisé par les issues $(5\,;5)$ et $(20\,;20)$:

$$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \frac{4}{20} = \mathbf{0{,}2}$$

B est réalisé par les issues $(5\,;20)$, $(10\,;20)$, $(20\,;5)$, $(20\,;10)$ et $(20\,;20)$:

$$P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4+2+4+2+2}{20} = \frac{14}{20} = \mathbf{0{,}7}$$

3) Définir par une phrase l'événement $\overline{B}$ et donner sa probabilité.

$\overline{B}$: « *on ne tire aucun billet de 20 €* ».

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}7 = \mathbf{0{,}3}$$

4) Définir par une phrase l'événement $A \cap \overline{B}$ et donner sa probabilité.

$A \cap \overline{B}$: « *on tire deux billets identiques et aucun billet de 20 €* », c'est-à-dire « *on tire deux billets de 5 €* ».

Seule l'issue $(5\,;5)$ réalise cet événement :

$$P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \mathbf{0{,}1}$$

III. Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau

Exercice 17 - (A l'aide d'un tableau) - 10 p 250 Math'X

Dans la population E d'une classe de seconde, on considère l'ensemble R des élèves prenant leur repas au lycée et l'ensemble L des élèves habitant « *loin* » (à plus de 2 km du lycée).
On note $\overline{\text{R}}$ (respectivement $\overline{\text{L}}$) l'ensemble des élèves de cette classe n'appartenant pas à R (respectivement L). A partir du tableau des effectifs suivant, calculer la probabilité (sous forme décimale) :

	L	$\overline{\text{L}}$	TOTAL
R	12	8	20
$\overline{\text{R}}$	3	7	10
Total	15	15	30

1) qu'un élève pris au hasard dans E habite loin ;

15 élèves sur 30 habitent loin : $P(L) = \frac{15}{30} = \mathbf{0{,}5}$.

2) qu'un élève pris au hasard dans L déjeune au lycée ;

Parmi les 15 élèves qui habitent loin, 12 déjeunent au lycée : $P_L(R) = \frac{12}{15} = \mathbf{0{,}8}$.

3) qu'un élève pris au hasard dans R habite loin ;

Parmi les 20 élèves qui déjeunent au lycée, 12 habitent loin : $P_R(L) = \frac{12}{20} = \mathbf{0{,}6}$.

4) qu'un élève pris au hasard dans E habite loin et déjeune au lycée.

12 élèves sur 30 habitent loin et déjeunent au lycée : $P(L \cap R) = \frac{12}{30} = \mathbf{0{,}4}$.

Exercice 18 - (A l'aide d'un tableau) - 68 p 315 du LS

Dans une école de musique, les élèves peuvent apprendre le piano, la guitare ou un autre instrument. Ils ont aussi la possibilité de participer à un orchestre. La répartition dans les différents ateliers est donnée dans le tableau ci-dessous :

	Piano	Guitare	Autre instrument	total
Orchestre	20		70	
Pas orchestre		190		350
Total	150			450

1) Compléter le tableau.

- Orchestre total : $450 - 350 = 100$;
- Piano pas orchestre : $150 - 20 = 130$;
- Guitare orchestre : $100 - 20 - 70 = 10$, donc guitare total : $10 + 190 = 200$;
- Autre instrument pas orchestre : $350 - 130 - 190 = 30$, donc autre total : $70 + 30 = 100$.

	Piano	Guitare	Autre instrument	total
Orchestre	20	**10=100-70-20**	70	**100=450-350**
Pas orchestre	**130=150-20**	190	**30=350-130-190**	350
Total	150	**200=10+190**	**100=70+30**	450

2) On choisit au hasard un élève de cette école de musique.

a) Quelle est la probabilité que cet élève apprenne la guitare ?

$P(\text{« } guitare \text{ »}) = \dfrac{200}{450} = \dfrac{4}{9} \approx 0{,}444$

b) Quelle est la probabilité que cet élève ne fasse pas partie de l'orchestre ?

$P(\text{« } pas\ orchestre \text{ »}) = \dfrac{350}{450} = \dfrac{7}{9} \approx 0{,}778$

c) Quelle est la probabilité que cet élève joue du piano dans l'orchestre ?

$P(\text{« } piano\ et\ orchestre \text{ »}) = \dfrac{20}{450} = \dfrac{2}{45} \approx 0{,}044$