Chapitre 1

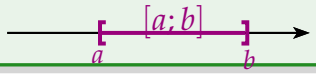
Généralités sur les fonctions

I. Intervalles de $\mathbb{R}$

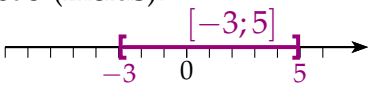
1) Définition d'un intervalle

Définition

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$:
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'**intervalle** $[\,a\,;\,b\,]$.
Il contient tous les nombres compris entre a (inclus) et b (inclus).
On peut le représenter sur la droite réelle.



Exemple : l'intervalle $[\,-3\,;\,5\,]$ contient tous les nombres compris entre -3 (inclus) et 5 (inclus).



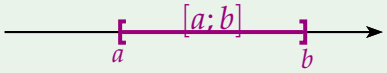
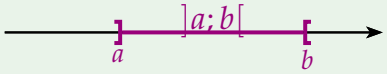
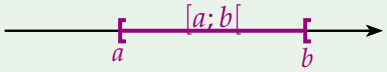
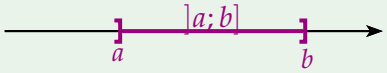
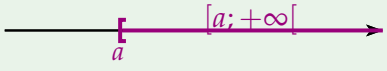
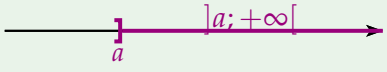
Donc $1 \in [-3;5]$ $-1 \in [-3;5]$ $12 \notin [-3;5]$ $-5 \notin [-3;5]$ $5 \in [-3;5]$

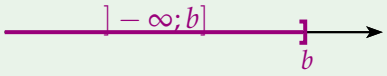
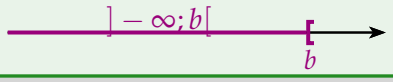
Remarque On utilise les symboles $\in$ "appartient" et $\notin$ "n'appartient pas".

2) Différents types d'intervalles

Définition

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$:
L'ensemble des réels x tels que :

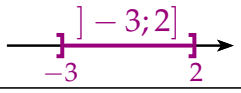
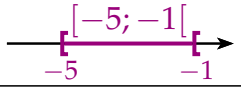
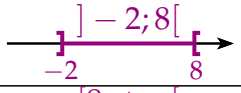
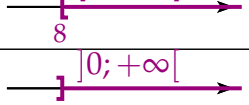
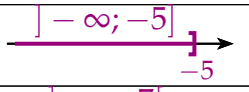
$a \leqslant x \leqslant b$	est l'intervalle	$[a;b]$	
$a < x < b$	est l'intervalle	$]a;b[$	
$a \leqslant x < b$	est l'intervalle	$[a;b[$	
$a < x \leqslant b$	est l'intervalle	$]a;b]$	
$a \leqslant x$	est l'intervalle	$[a;+\infty[$	
$a < x$	est l'intervalle	$]a;+\infty[$	

$x \leqslant b$	est l'intervalle	$]-\infty;b]$	
$x < b$	est l'intervalle	$]-\infty;b[$	

Remarques

- $+\infty$ se lit *"plus l'infini"* et $-\infty$ se lit *"moins l'infini"* ,
- l'intervalle $[\,a\,;\,b[$ est **fermé** en a (crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle) : $a \in [\,a\,;\,b[$, et est **ouvert** en b (crochet tourné vers l'extérieur de l'intervalle) : $b \notin [\,a\,;\,b[$,
- On écrit toujours $]-\infty$ et $+\infty[$ (intervalles ouverts).

Exemple :

Inégalité	Signification	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 5$	x est compris entre 2 (inclus) et 5 (inclus)	$x \in [2\,;\,5]$	
$-3 < x \leq 2$	x est compris entre -3 (exclu) et 2 (inclus)	$x \in]-3\,;\,2]$	
$-5 \leq x < -1$	x est compris entre -5 (inclus) et -1 (exclu)	$x \in [-5\,;\,-1[$	
$-2 < x < 8$	x est compris entre -2 (exclu) et 8 (exclu)	$x \in]-2\,;\,8[$	
$8 \leq x$	x est supérieur ou égal à 8	$x \in [8\,;\,+\infty[$	
$x > 0$	x est strictement supérieur à 0	$x \in]0\,;\,+\infty[$	
$x \leq -5$	x est inférieur ou égal à -5	$x \in]-\infty\,;\,-5]$	
$7 > x$	x est strictement inférieur à 7	$x \in]-\infty\,;\,7[$	

Remarque Dans l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$, le nombre $b-a$ s'appelle l'**amplitude** de l'intervalle.

II. Représentation graphique d'une fonction

1) Construction d'une courbe

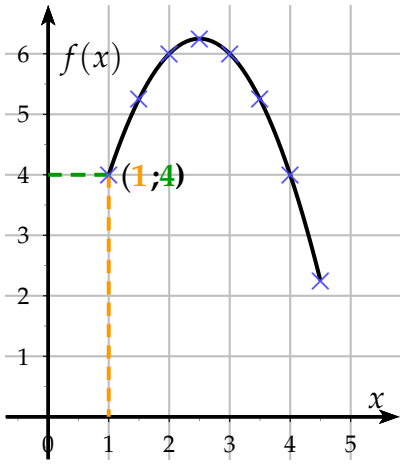
Méthode - Déterminer un antécédent par calcul

Enoncé :
Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

Tracer, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f.
réponse :

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes.
En reliant les points, on obtient une courbe.
Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x; f(x))$.



Remarque Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (y) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$ peut se noter $y = 5x - x^2$.
De façon générale, l'équation d'une courbe se note $y = f(x)$.

Méthode - Vérifier si un point appartient à la courbe d'une fonction

Enoncé :
Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$
Vérifier que le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe de f.

réponse :
Le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe si $f(-2) = 7$.
$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$
Donc le point de coordonnées $(-2; 7)$ appartient à la courbe de f.

2) Lecture graphique d'une image et d'un antécédent

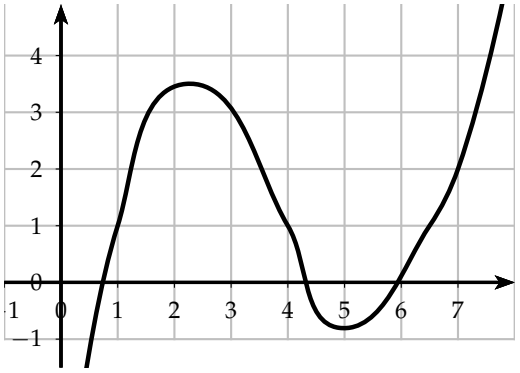
Méthode - Lire graphiquement une image et un antécédent

Enoncé :

On considère la fonction f représentée ci-contre.
Déterminer graphiquement :

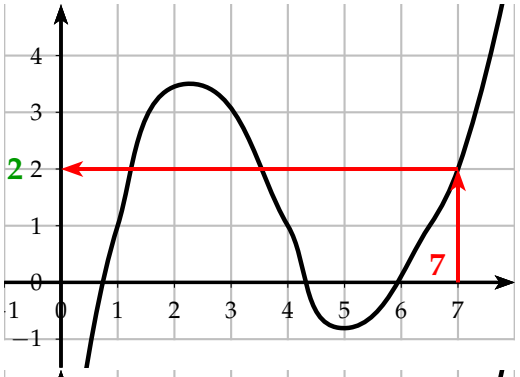
1) L'image de 7 par la fonction f.

2) Trois antécédents de 1 par la fonction f.

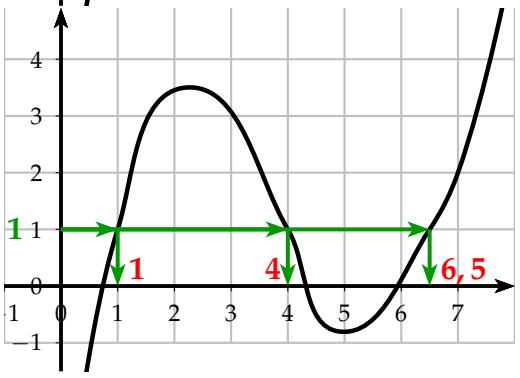


réponse :

1) Pour déterminer l'image de 7 , on « *part* » de l'abscisse 7, on « *rejoint* » la courbe et on lit la valeur correspondante sur l'axe des ordonnées.
On lit donc que l'image de 7 est 2.
On peut noter : $f(7) = 2$.



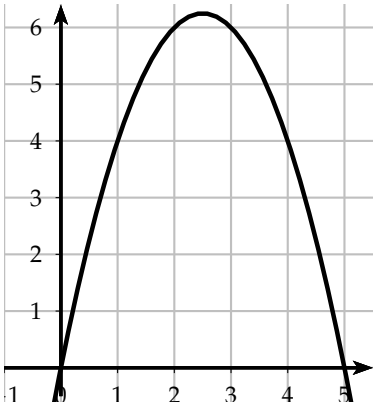
2) Pour déterminer des antécédents de 1 , on « *part* » de l'ordonnée 1 , on « *rejoint* » la courbe et on lit les valeurs correspondantes sur l'axe des abscisses. On lit donc que des antécédents de 1 sont 1, 4 et 6, 5.
On peut par exemple noter : $f(4) = 1$.



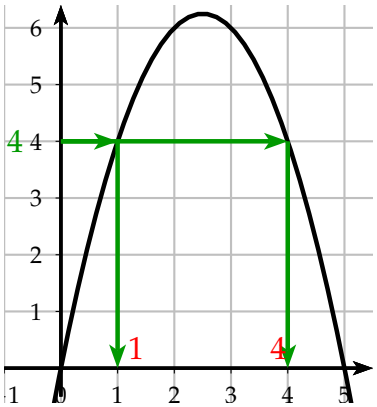
III. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthode - Résoudre graphiquement une équation

Enoncé :
On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



réponse :
L'équation $5x - x^2 = 4$ peut s'écrire $f(x) = 4$.
Ce qui revient à trouver des antécédents de 4 par la fonction f.
On « *part* » de l'ordonnée 4, on « *rejoint* » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 1$ ou $x = 4$.
On peut noter : $S = \{1;4\}$.



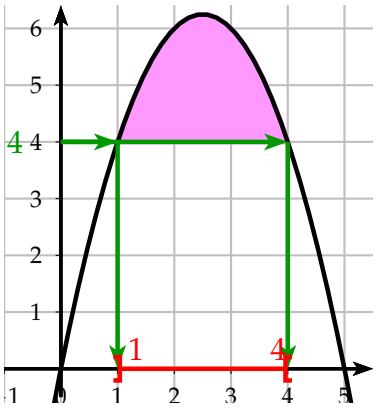
Remarques

- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Méthode - Résoudre graphiquement une inéquation

Enoncé :
Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

réponse :
L'inéquation $5x - x^2 > 4$ peut s'écrire $f(x) > 4$
Ce qui revient à déterminer les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 4. On lit les solutions correspondantes sur l'axe des abscisses :
x est strictement compris entre 1 et 4 .
On peut noter : $S =]1;4[$



Méthode - Résoudre une équation ou une inéquation du type : $f(x) = g(x), f(x) < g(x)$

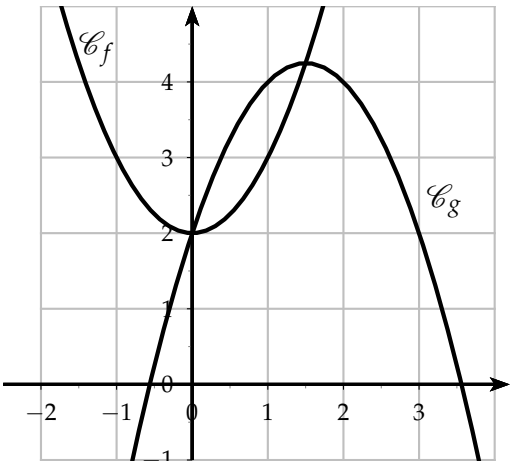
Enoncé :

On a représenté les courbes des fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 2$

1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

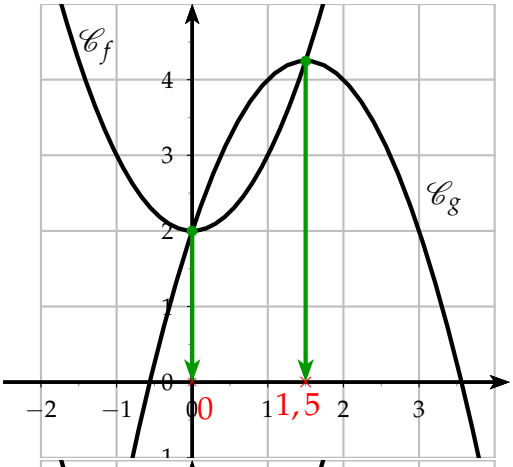
2) Résoudre graphiquement I'inéquation $f(x) < g(x)$.



réponse :

1) $f(x) = g(x)$ lorsque les courbes se croisent.
II suffit de lire l'abscisse des points d'intersection des deux courbes.

On lit les solutions sur l'axe des abscisses : 0 et 1,5.
On peut noter : $S = \{0; 1,5\}$.



2) $f(x) < g(x)$ lorsque la courbe de g se trouve au-dessus de la courbe de f.
On lit l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses : l'intervalle $]0; 1,5[$.
On peut noter : $S =]0; 1,5[$.

Les valeurs 0 et 1,5 sont exclues de l'ensemble des solutions car dans l'inéquation $f(x) < g(x)$ l'inégalité est stricte.

